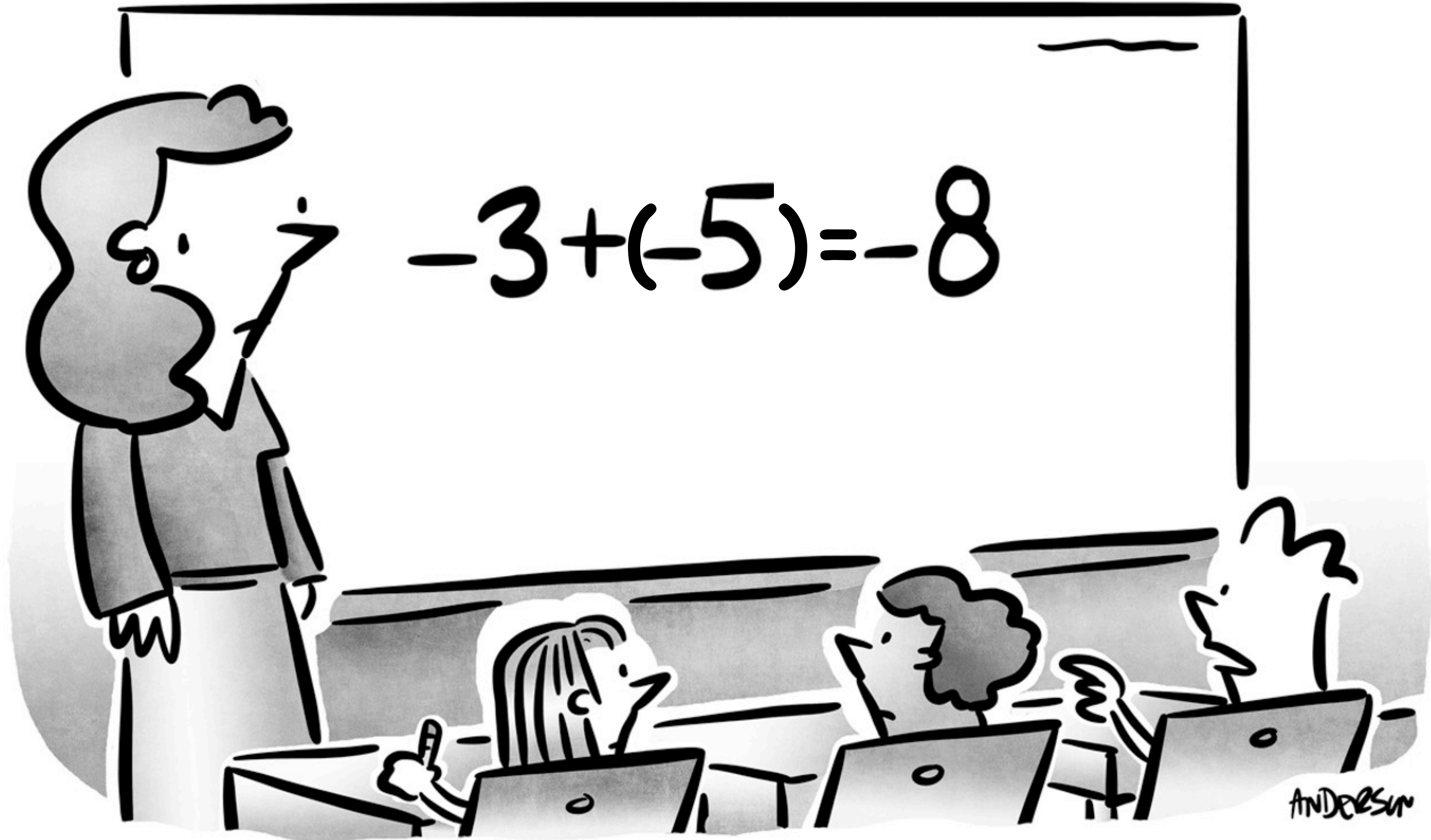




Ο σχεδιασμός της διδασκαλίας με σκοπό την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης



Μαρίνος Αναστασάκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης



«Δηλαδή κάνοντας πρόσθεση βρίσκουμε κάτι που είναι μικρότερο από τους αριθμούς που προσθέσαμε; Να γιατί όλοι μισούν τα Μαθηματικά!»

Δομή παρουσίασης

1. Πότε λέμε ότι ένα άτομο είναι «καλό» στα Μαθηματικά;
2. Τι είδους μάθηση οδηγεί στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης;
3. Η επίλυση προβλήματος στα Μαθηματικά
4. Προετοιμάζοντας ένα πλάνο διδασκαλίας των Μαθηματικών σε 8 βήματα

1. Πότε λέμε ότι ένα άτομο είναι «καλό» στα Μαθηματικά;

*Πώς μπορούμε ως εκπαιδευτικοί να καταλάβουμε
ότι κάποιος μαθητής ή κάποια μαθήτριά μας είναι
«καλός»/«καλή» στα Μαθηματικά;*

Πώς ορίζουμε τη “μαθηματική ικανότητα”;

Ένα άτομο είναι “καλό” στα Μαθηματικά αν μπορεί να:

1. Σκέφτεται με μαθηματικό τρόπο

- αναγνώριση των ερωτημάτων που μπορούν να απαντηθούν με χρήση Μαθηματικών
- διατύπωση μαθηματικών ερωτημάτων

2. Επιχειρηματολογεί με μαθηματικό τρόπο

- τι είναι η μαθηματική απόδειξη;
- τι μπορεί να συμβεί και τι όχι;

3. Επικοινωνήσει τα Μαθηματικά

- Προφορικά, γραπτά, οπτικά
- Κατανόηση της εργασίας κάποιου

4. Μοντελοποιήσει μια κατάσταση

- μετάφραση της πραγματικότητας με χρήση Μαθηματικών
- ανάλυση και κριτική των προτεινόμενων μοντέλων

Πώς ορίζουμε τη “μαθηματική ικανότητα”;

5. Διατυπώσει και να λύσει προβλήματα

- προσδιορισμός απαραίτητων/διαθέσιμων πληροφοριών
- καταγραφή πιθανών λύσεων

6. Χρησιμοποιεί διάφορες αναπαραστάσεις

- κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση από τη μια μορφή στην άλλη
- κατανόηση της σχέσης μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων

7. Χρησιμοποιεί μαθηματικά σύμβολα και τη μαθηματική γλώσσα

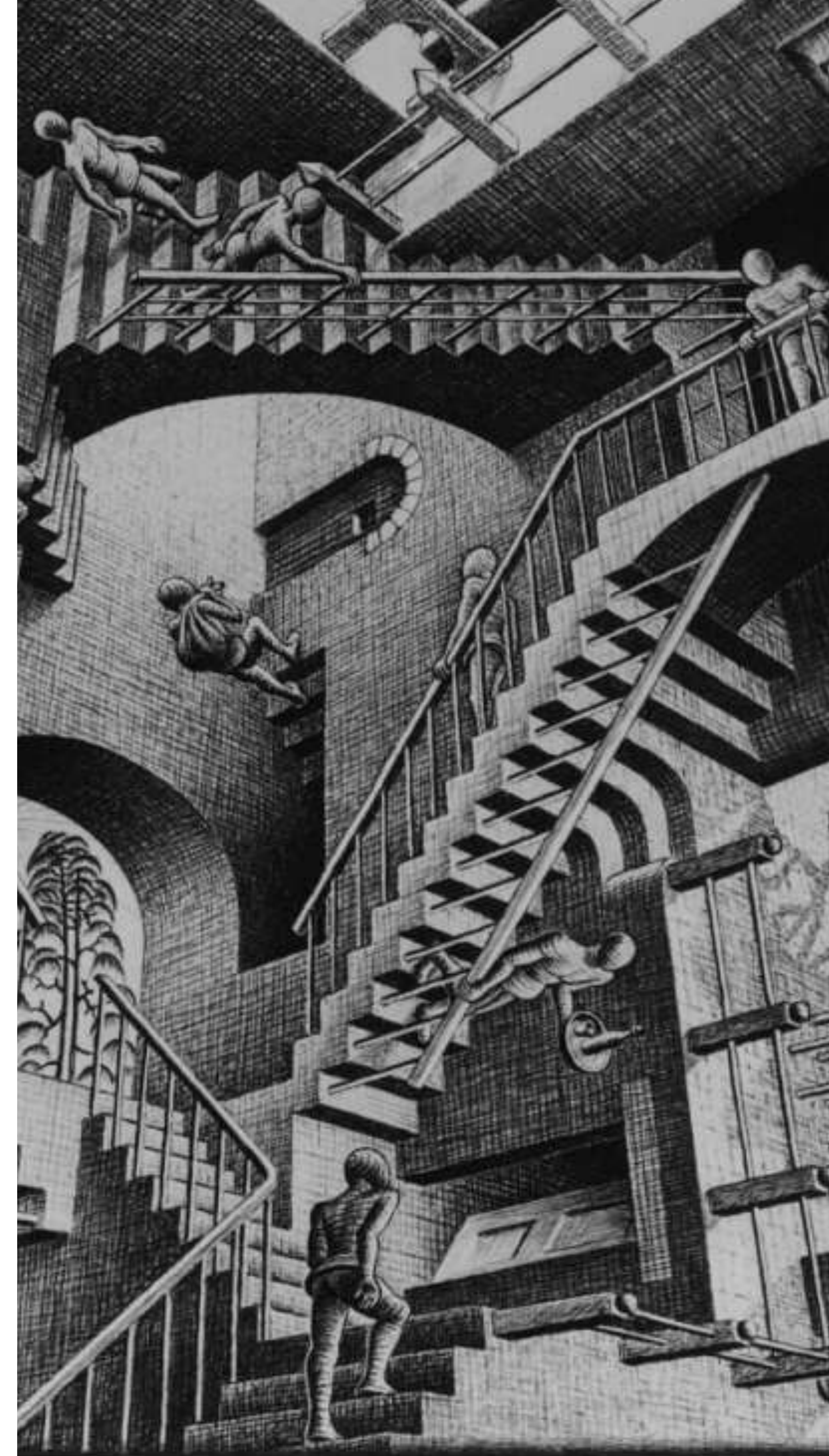
- γνώση και ερμηνεία της τυπικής μαθηματικής γλώσσας
- μετάφραση από τη φυσική γλώσσα στη γλώσσα των Μαθηματικών

8. Χρησιμοποιεί εργαλεία

- χρήση εργαλείων και τεχνολογίας
- γνώση των περιορισμών της τεχνολογίας

2. Τι είδους μάθηση οδηγεί στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης;

Anastasakis M. & Dafermos M. (2023) **Exploring Paradoxes in the Development of Mathematical Thinking: a Cultural-historical Perspective.** *Cultural-Historical Psychology*, 19 (4) pp. 46-55.
<https://doi.org/10.17759/chp.2023190405>



Μαθηματικό Άγχος (ΜΑ)

Μαθηματικό άγχος: το αίσθημα φόβου και έντασης που βιώνει ένα άτομο όταν χειρίζεται αριθμούς ή λύνει ένα μαθηματικό πρόβλημα (Richardson & Suinn, 1972).

- επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τις επιδόσεις των μαθητών/μαθητριών (Ashcraft, 2002)
- καθορίζει τον επαγγελματικό προσανατολισμό (Ma, 1999)
- επηρεάζει τις αντιλήψεις των μαθητών/μαθητριών σχετικά με τις ικανότητες τους στα Μαθηματικά και διαμορφώνει την ταυτότητα τους (Brown *et al.*, 2008)
- αναπτύσσεται ακόμα και σε παιδιά των πρώτων τάξεων του Δημοτικού σχολείου (Ramirez *et al.*, 2013)
- «διατηρείται» και μετά την ενηλικίωση, προκαλώντας πανικό ακόμα και κατά την εκτέλεση απλών μαθηματικών έργων (Maloney *et al.*, 2010).



Που οφείλεται το ΜΑ;

- ανεπαρκείς μαθηματικές ικανότητες (Gunderson *et al.*, 2017)
- αδυναμίες κατά την αριθμητική και χωρική επεξεργασία στο γνωστικό σύστημα (π.χ., Ma & Xu, 2004)
- φύλλο (Hopko *et al.*, 2003; Stoet *et al.*, 2016)
- προσωπικότητα του ατόμου π.χ. λόγω γενικευμένου άγχος ή του άγχους για τις εξετάσεις (Hembree, 1990)
- νευροβιολογική/γενετική βάση (Wang *et al.*, 2014)
- κοινωνικοί και περιβαλλοντικοί παράγοντες (Ashcraft, 2019)
- αποτέλεσμα της ερμηνείας των αρνητικών εμπειριών με τα Μαθηματικά που βιώνει ένα άτομο (Ramirez *et al.*, 2018).



Το κοινωνικό περιβάλλον ως πηγή του ΜΑ

Το Μαθηματικό Άγχος δεν αποτελεί ατομικό γνώρισμα αλλά χαρακτηριστικό της σχέσης μεταξύ ατόμου και κοινωνικού περιβάλλοντος, κάτι που χαρακτηρίζει την ανάπτυξη (ή μη) της μαθηματικής σκέψης.

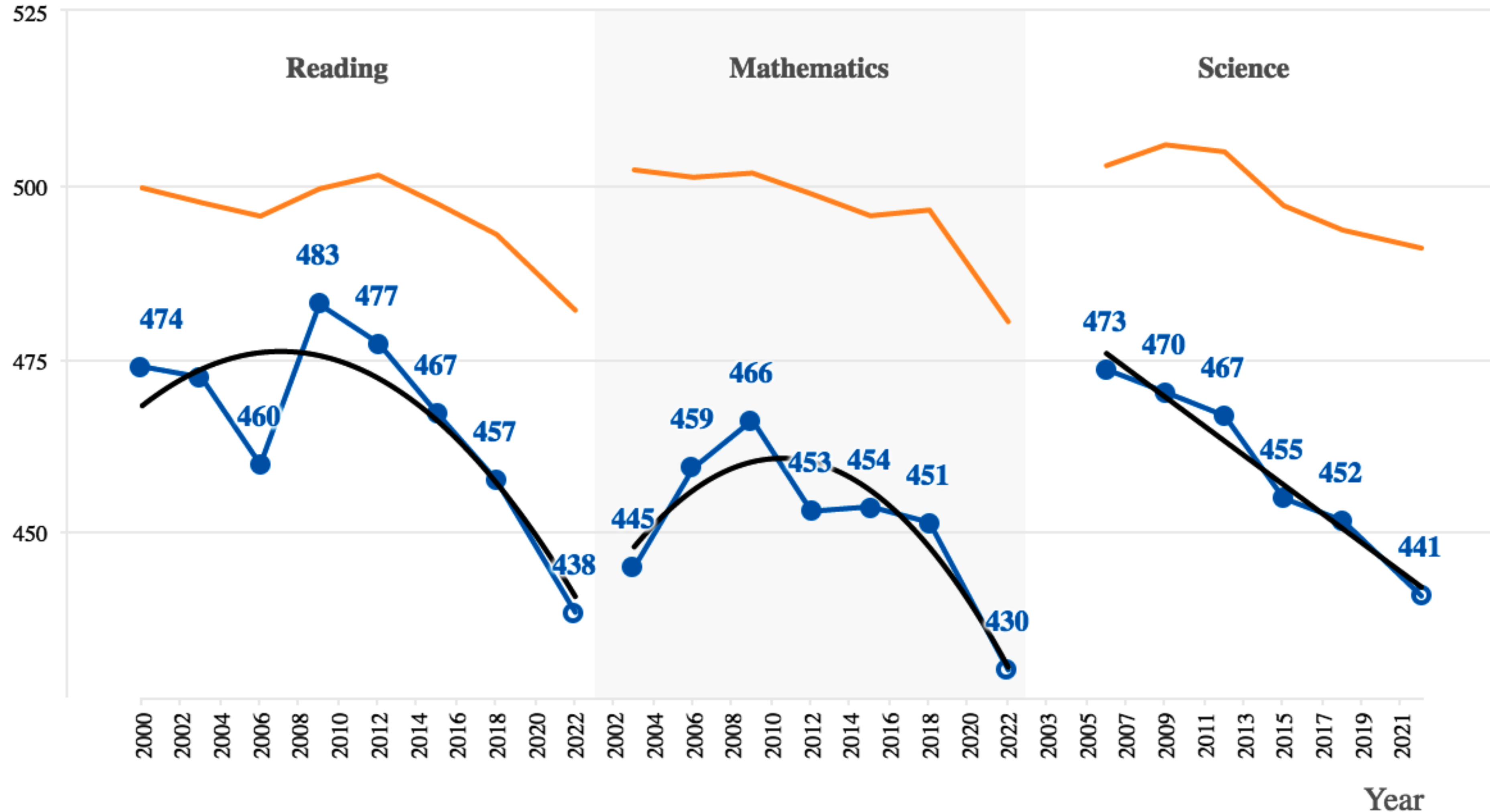
- ▶ **Γονείς με ΜΑ:** αυξάνουν τα επίπεδα ΜΑ των παιδιών τους (Maloney *et al.*, 2015)
- ▶ **Εκπαιδευτικοί με ΜΑ ή αρνητική στάση προς τα Μαθηματικά:**
 - δίνουν υπερβολική έμφαση στην αποστήθιση (Trujillo & Hadfield, 1999)
 - υιοθετούν δογματικές προσεγγίσεις κατά τη διδασκαλία (π.χ. Ball, 1990)
 - προκαλούν αποφυγή των Μαθηματικών (Jaggernaut & Jameson-Charles, 2015)
 - δημιουργούν στερεοτυπικές πεποιθήσεις ως προς τα Μαθηματικά και το φύλο (π.χ., Beilock *et al.*, 2010).



Οι επιπτώσεις

Αποτελέσματα PISA 2022 (Ελλάδα)

● Mean performance — Best-fitting trend — OECD Average (23 countries)



Το ερώτημα

- Περίπου το 20% των μαθητών/μαθητριών εκδηλώνουν ΜΑ (Roth & Walshaw, 2015)
- Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες με τα Μαθηματικά τόσο σε εθνικό (Χαραλαμπάκης & Χρήστου, 2019) όσο και σε διεθνές επίπεδο (González & Sierra, 2020)
- Κυκλική επαναληψιμότητα του ΜΑ: οι εκπαιδευτικοί με αρνητική στάση ή/και άγχος για τα Μαθηματικά συμπεριφέρονται και διδάσκουν με τρόπους που μπορεί να προκαλέσουν ΜΑ στους μαθητές και τις μαθήτριες τους (Bekdemir, 2010)
- Η βιβλιογραφία για το ΜΑ αποτυγχάνει να δώσει μια επαρκή απάντηση: γιατί υπάρχει άγχος για τα Μαθηματικά και όχι για την Ιστορία, τη Γλώσσα ή τη Φυσική;
- Απουσία αναπτυξιακής προοπτικής.

► Το ερώτημα

- *Τι είδους μάθηση οδηγεί στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης;*

Θεωρητικό πλαίσιο

Η πολιτισμική-ιστορική θεωρία του Vygotsky

- ▶ Το **κοινωνικό περιβάλλον** δεν αποτελεί παράγοντα που συνδιαμορφώνει την ανάπτυξη· αποτελεί την **πηγή ανάπτυξης του ατόμου**
- ▶ Οι **ανώτερες ψυχολογικές λειτουργίες** (π.χ. λογική μνήμη, εκούσια προσοχή, λεκτική σκέψη, βουλευτικές διαδικασίες) εμφανίζονται **πρώτα ως διαπροσωπικές σχέσεις και μετά εσωτερικεύονται ως γνωστικές λειτουργίες του ατόμου** (π.χ. Vygotsky, 2003)

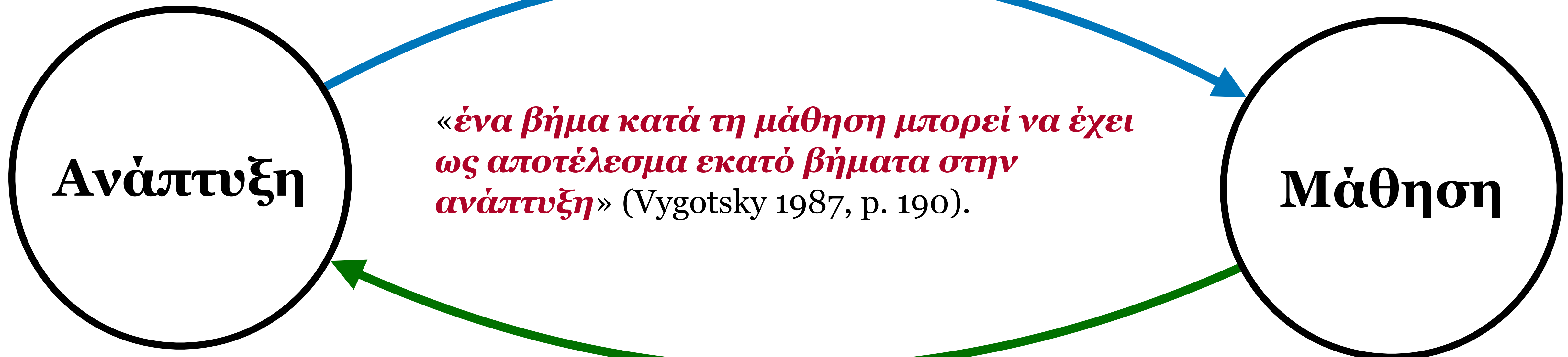
Η κριτική του **Vygotsky** προς τις υπάρχουσες θεωρίες που αφορούν στη σχέση μάθησης και ανάπτυξης (Dafermos, 2018):

- (1) **Η μάθηση ακολουθεί την ανάπτυξη:** η ανάπτυξη αποτελεί μια ενδογενή διαδικασία βιολογικής ωρίμανσης του ατόμου
 - *όταν ένας μαθητής/μια μαθήτρια είναι βιολογικά ώριμος/ώριμη τότε μπορεί να μάθει*
- (2) **Η μάθηση συμπίπτει με την ανάπτυξη:** ως ανάπτυξη αντιλαμβανόμαστε τη συσσώρευση γνώσεων, μαθησιακών συμπεριφορών και δεξιοτήτων
 - *όταν ένας μαθητής/μια μαθήτρια αποκτά γνώσεις και δεξιότητες τότε αναπτύσσεται.*

Η σχέση διδασκαλίας-μάθησης και ανάπτυξης σύμφωνα με την πολιτισμική-ιστορική θεωρία του Vygotsky

Οι μαθητές/μαθήτριες που έχουν ήδη κατακτήσει ένα σώμα γνώσεων και δεξιοτήτων είναι σε θέση να εμπλακούν αποτελεσματικά σε νέες μαθησιακές εμπειρίες.

Η ανάπτυξη θέτει τις βάσεις για τη μάθηση



Η μάθηση καθοδηγεί την ανάπτυξη

Μέσω κοινωνικών αλληλεπιδράσεων κατά τη μάθηση, οι μαθητές/μαθήτριες αποκτούν νέες γνώσεις και πολιτισμικά εργαλεία τα οποία τους επιτρέπουν να υπερβούν το τρέχον επίπεδο ανάπτυξης τους.

Μεθοδολογία

- ▶ Πλαίσιο: Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
- ▶ Έγκριση από την Επιτροπή Ηθικής και Δεοντολογίας του Πανεπιστημίου
- ▶ Συμμετέχοντες/συμμετέχουσες: 24 προπτυχιακοί φοιτητές και προπτυχιακές φοιτήτριες (μέση ηλικία: 21,2 έτη, μέσο έτος σπουδών: 3,5 έτη)
- ▶ Ημιδομημένες συνεντεύξεις (30-60 λεπτά)
 - *«Πώς θα περιγράφατε τη σχέση σας με τα Μαθηματικά;»*
 - *«Τι είδους δυσκολίες συναντήσατε με τα Μαθηματικά;»*
- ▶ Ευρήματα από ανάλυση δεδομένων για 12 συμμετέχοντες/συμμετέχουσες.

Ευρήματα

Οι δυο ομάδες

Ομάδα Α (n=6)

- Χαμηλές επιδόσεις & αρνητική στάση
- Σοβαρές δυσκολίες

Group B (n=6)

- Υψηλές επιδόσεις & θετική στάση
- Μικρές/καθόλου δυσκολίες

- Η σχέση μου με τα Μαθηματικά **δεν ήταν** και πάρα πολύ **καλή**. (Φ01)
- Πάντα **φοβόμουν** τα Μαθηματικά. (Φ04)
- Πάντα ένιωθα **μειονεκτικά** σε αυτό το μάθημα. (Φ06)
- Τώρα στο Πανεπιστήμιο είχα μια επαφή, κατά κάποιο τρόπο **αναγκαστική**. (Φ07)
- ...σχέση λίγο περίεργη γιατί πάντα με **άγχωναν**. (Φ08)
- [η σχέση μου με τα Μαθηματικά] **δεν ήταν καλή** για αυτό πήγα θεωρητική κατεύθυνση. (Φ12)

- Αχ τα **αγαπώ** τα Μαθηματικά από πολύ μικρή ηλικία... (Φ02)
- Γενικά μου **αρέσουν** τα Μαθηματικά. (Φ03)
- Μπορώ να πω ότι έχω μια **πολύ καλή σχέση** με τα Μαθηματικά. (Φ05)
- Έφτασα σε ένα σημείο να τα **αγαπώ** πάρα πολύ... (Φ09)
- Ήμουν ένας **αριστούχος** μαθητής, [...] όλα [τα μαθήματα ήταν το ίδιο για εμένα. (Φ10)
- Ήμουν **πολύ καλή** στο σχολείο και γενικά μου **άρεσαν** τα Μαθηματικά. (Φ11)

Ευρήματα

Θέματα

Θέμα 1: Τα Μαθηματικά σε σχέση με το επάγγελμα του εκπαιδευτικού
Τι είδους μαθηματικής γνώσης χρειάζονται οι εκπαιδευτικοί;

Θέμα 2: Η φύση της μαθηματικής γνώσης
Ποιος μπορεί να μάθει Μαθηματικά;

Θέμα 3: Η διαδικασία της μάθησης
Πώς μαθαίνουμε Μαθηματικά;

Θέμα 4: Η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης στο Πανεπιστήμιο
Τι έμαθα στο Πανεπιστήμιο;

Θέμα 5: Δραματικά γεγονότα
Τι είδους στρεσογόνες εμπειρίες είχα μέχρι τώρα;

Ευρήματα

Συγκρίσεις μεταξύ ομάδων

Θέμα 1: **Τα Μαθηματικά σε σχέση με το επάγγελμα του εκπαιδευτικού**
Τι είδους μαθηματικής γνώσης χρειάζονται οι εκπαιδευτικοί;

Ομάδα Α

Χαμηλές επιδόσεις, αρνητική στάση, σοβαρές δυσκολίες

...η ύλη που επιλέγει να διδάξει, νομίζω ότι είναι **εντελώς ξένη** και **αχρειαστή** για εμάς που θα είμαστε δάσκαλοι στο Δημοτικό σχολείο... οπότε θα μπορούσαμε να εστιάζουμε σε ενότητες από το Δημοτικό, εκπαιδευτούμε με παραδείγματα από τα βιβλία, από την ύλη, δεν ξέρω... οπότε **θεωρώ ότι όλο είναι ένα λάθος...** (Φ06)

Ομάδα Β

Υψηλές επιδόσεις, θετική στάση, μικρές/καθόλου δυσκολίες

Στατιστική κάνω ίσως για πρώτη φορά γιατί δεν έτυχε να τη συναντήσω στο σχολείο αλλά.. δεν γνωρίζω ακριβώς... πόσο θα μου ήταν **χρήσιμη** αυτού του είδους η **γνώση**... στην περίπτωση των Μαθηματικών, αυτό το μάθημα είναι που με κάνει να λέω, «**είμαι δάσκαλος, το χρειάζομαι απαραίτητα αυτό;**» είναι είδος Μαθηματικών που **θα μου χρησιμεύσει** να καλύψω κάποιο κενό; (Φ10)

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο θα πρέπει να εστιάζει μόνο στο περιεχόμενο του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών του Δημοτικού Σχολείου.

Ευρήματα

Συγκρίσεις μεταξύ ομάδων

Θέμα 2: **Η φύση της μαθηματικής γνώσης**
Ποιος μπορεί να μάθει Μαθηματικά;

Ομάδα Α

Χαμηλές επιδόσεις, αρνητική στάση, σοβαρές δυσκολίες

*Είχα αποφασίσει από πολύ νωρίς την κατεύθυνση μου γιατί έβλεπα ότι είχα **κλίση** στα περισσότερα **θεωρητικά μαθήματα** (Φ06)*

*[μετά από τη συμπλήρωση των μαθημάτων που απαιτούνται για τη λύση πτυχίου]: **Τελειώσαμε** με τα Μαθηματικά... (Φ07)*

*νομίζω απλά ότι είμαι πιο **θεωρητικό μυαλό**... δηλαδή μου άρεσε πιο πολύ να μιλάω και να γράφω εκθέσεις παρά να λύνω ασκήσεις... (Φ08)*

Ομάδα Β

Υψηλές επιδόσεις, θετική στάση, μικρές/καθόλου δυσκολίες

*Αχ τα αγαπώ τα Μαθηματικά από **πολύ μικρή ηλικία**... [...] με τους γονείς μου παίζαμε μαθηματικά παιχνίδια... [...] υπάρχει ένας **τρόπος σκέψης** πίσω από όλο αυτό που μου αρέσει πάρα πολύ... (Φ02)*

*εντοπίζω στον εαυτό μου μια δυσκολία στο να **γράψω μεγάλα κείμενα** σε εργασίες, γιατί... [...] δεν ξέρω μπορεί να φταίει το ότι ήμουν από **θετική** και έχω μάθει να σκέφτομαι έτσι; (Φ09)*

Τα Μαθηματικά είναι μια έμφυτη ικανότητα.
Η μάθηση των Μαθηματικών έχει ένα τέλος.

Τα Μαθηματικά είναι τρόπος σκέψης.
Τα Μαθηματικά ως μια αναπτυξιακή διαδικασία

Ευρήματα

Συγκρίσεις μεταξύ ομάδων

Θέμα 3: **Η διαδικασία της μάθησης**
Πώς μαθαίνουμε Μαθηματικά;

Ομάδα Α

Χαμηλές επιδόσεις, αρνητική στάση, σοβαρές δυσκολίες

...στο Γυμνάσιο επειδή ήθελα **να γράφω καλά στις εξετάσεις**, με έπιανε έτσι ένας πανικός και έλεγα της μαμάς μου: βρες μου ένα καθηγητή να κάνουμε μάθημα για **λίγες μέρες πριν** τις εξετάσεις. (Φ12)

[Η σχέση μου με τα Μαθηματικά] ήταν **μέτρια... δεν ήταν και πολύ καλή**... χρειαζόμουν **αρκετή προσπάθεια**, να περνάω **αρκετή ώρα** λύνοντας ξανά ασκήσεις και κοιτάζοντας τη θεωρία για να καταλάβω τα Μαθηματικά... (Φ01)

Ομάδα Β

Υψηλές επιδόσεις, θετική στάση, μικρές/καθόλου δυσκολίες

Το μόνο **κίνητρο** θεωρώ ότι ήταν η **βαθμολογία**... Αυτό με έκανε να πω: στοπ, πρέπει να πηγαίνω [στις διαλέξεις]... να τα παρακολουθώ για να τα **περνάω με καλό βαθμό**, γιατί... κατά τα άλλα τίποτα, θεωρώ δηλαδή ότι δεν έχω μάθει κάτι παραπάνω... (Φ02)

Γενικά τα **καταλαβαίνω εύκολα**, δηλαδή δεν δυσκολεύομαι τόσο και μου **αρέσει** σαν μάθημα. (Φ05)

Βαθμοκεντρική μάθηση
Λογική της ήσσονος προσπάθειας: η μάθηση των Μαθηματικών απαιτεί ελάχιστη προσπάθεια

Ευρήματα

Συγκρίσεις μεταξύ ομάδων

Θέμα 4: **Η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης στο Πανεπιστήμιο**
Τι έμαθα στο Πανεπιστήμιο;

Ομάδα Α

Χαμηλές επιδόσεις, αρνητική στάση, σοβαρές δυσκολίες

Ομάδα Β

Υψηλές επιδόσεις, θετική στάση, μικρές/καθόλου δυσκολίες

Στα δυο υποχρεωτικά [μαθήματα] ειδικά, επειδή **εστιάζαμε** ακριβώς σε **πράγματα** που **θα διδάξουμε** αργότερα... υπήρχε και άλλη όρεξη να το μελετήσεις γιατί ξέρεις ότι θα σου **φανεί χρήσιμο**... (Φ06)

Δεν θεωρώ ότι είναι έμφυτη, αυτό καλλιεργείται από παιδί όταν είναι ο άνθρωπος, δηλαδή πριν πάει καν σχολείο... εγώ θεωρώ ότι απλά από μικρή μέσω διάφορων τρόπων, ναι είχα αναπτύξει αυτό το πράγμα... και **στο Πανεπιστήμιο δεν έμαθα κάτι παραπάνω**... (Φ02)

Απουσία ανάπτυξης στο Πανεπιστήμιο

Ευρήματα

Συγκρίσεις μεταξύ ομάδων

Θέμα 5: **Δραματικά γεγονότα**

Τι είδους στρεσογόνες εμπειρίες είχα μέχρι τώρα;

Ομάδα Α

Χαμηλές επιδόσεις, αρνητική στάση, σοβαρές δυσκολίες

είχαμε μια δασκάλα κάπου στην **Τετάρτη** με **Πέμπτη** [Δημοτικού] κάπου εκεί, δεν θυμάμαι τώρα ακριβώς ηλικία... που νομίζω εκεί το έχασα κάπως το πράγμα γιατί **δεν μας συμπεριφερόταν υπέροχα** στα Μαθηματικά... σε **όποιον δεν καταλάβαινε**... ανέβαζε συνέχεια παιδιά στον πίνακα και αυτό... όταν σηκωνόμουν εγώ στον πίνακα... μου δημιουργούσε **πάρα πολύ μεγάλο άγχος** όλο αυτό γιατί... ένιωθα όλα τα παιδιά από κάτω να με κοιτάζουν, το πως θα κάνω την πράξη... (Φ06)



Τραυματικά γεγονότα

Ομάδα Β

Υψηλές επιδόσεις, θετική στάση, μικρές/καθόλου δυσκολίες

...σε ένα διαγώνισμα Γεωμετρίας... δεν είχα διαβάσει καθόλου και πήγα και έγραψα 20 και... τέλος πάντων ο καθηγητής να μου λέει λύσε το πρόβλημα μετά, στην τάξη, και εγώ **το έλυσα με τελείως διαφορετικό τρόπο** από ότι **το είχε διδάξει**... και εκεί με μπέρδεψε και μου είπε ότι **δεν είναι αυτός ο τρόπος** [...] πραγματικά αισθάνθηκα άσχημα, γιατί εντάξει έκανα φροντιστήρια και το ήξερα δεν είναι ότι είχα την επιφοίτηση... αλλά ναι είχα αισθανθεί άσχημα εκείνη την ημέρα το θυμάμαι... (Φ02)



Απουσία/λιγότερο σημαντικά περιστατικά

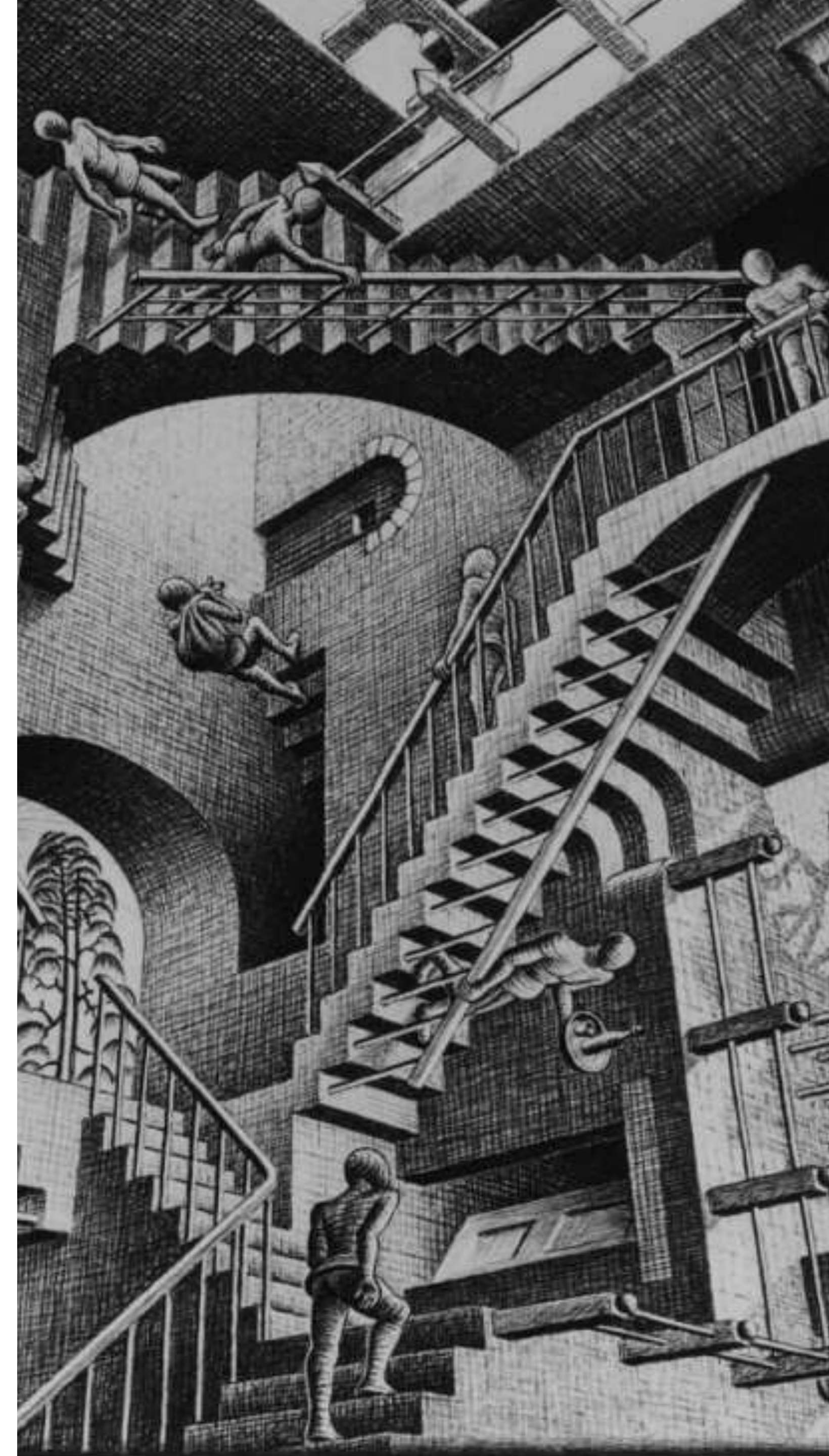
Συζήτηση

- ▶ Και στις δυο ομάδες, οι φοιτητές και οι φοιτήτριες του δείγματος:
 - ακολούθησαν **παρόμοιες αναπτυξιακές τροχιές**
 - εκτέθηκαν σε **πρακτικές που περιόρισαν το αναπτυξιακό δυναμικό τους**
- ▶ Τι είδους μάθηση **δεν οδηγεί στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης;**
Η μάθηση που:
 - τοποθετεί τις **εξετάσεις στο κέντρο της εκπαιδευτικής διαδικασίας** («*το μόνο μου κίνητρο ήταν να πάρω υψηλούς βαθμούς*»)
 - προωθεί τη **λογική της ήσονος προσπάθειας** («*χρειαζόμουν πολύ χρόνο και προσπάθεια*»)
 - θεωρεί ότι **καθορίζεται από γενετικούς παράγοντες** («*είμαι θεωρητικό μυαλό*»)
 - πρεσβεύει ότι η **πράξη θα πρέπει να ορίζει το περιεχόμενο της εκπαιδευτικής διαδικασίας** («*πρέπει να μάθω αυτό που θα διδάξω*»)
- ▶ Οι τραυματικές εμπειρίες περιορίζουν περαιτέρω την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Συζήτηση

- ▶ Στην καλύτερη περίπτωση, οι **βαθμοί** αποτελούν **ένδειξη της τρέχουσας και όχι της επικείμενης ανάπτυξης** του ατόμου
- ▶ Η **προσήλωση** στους **βαθμούς**, η ρηχή και «**χωρίς προβλήματα**» **μάθηση υπονομεύει την ανάπτυξη** ενός ατόμου στα Μαθηματικά
- ▶ **Οντολογικό κενό**: η εκπαιδευτική πραγματικότητα χαρακτηρίζεται από μια απουσία αναπτυξιακής προοπτικής
 - Γονείς, μαθητές/μαθήτριες και εκπαιδευτικοί «**εκπαιδεύονται**» να εστιάζουν στους βαθμούς, στα αποτελέσματα και όχι στην ανάπτυξη
- ▶ **Επιστημολογικό κενό**: η ίδια η επιστήμη παρουσιάζει κενά, με ερευνητικές ατζέντες που δεν εστιάζουν στην ανάπτυξη ενώ ταυτόχρονα διαμορφώνουν διδακτικές προσεγγίσεις που δεν προάγουν την ανάπτυξη της Μαθηματικής σκέψης
 - Ερευνητές και ακαδημαϊκοί «**εκπαιδεύονται**» να εστιάζουν στις επιδόσεις, τα αποτελέσματα και όχι στην ανάπτυξη.

3. Η επίλυση προβλήματος στα Μαθηματικά



Η Επίλυση Προβλήματος στα Μαθηματικά

Πάππος ο Αλεξανδρινός (290 μ.Χ. - 350 μ.Χ.)

Συναγωγή (Βιβλίο 7) διατυπώνει τους πρώτους κανόνες ευρετικής

- *Ανάλυση*: μετάβαση από το ζητούμενο σε κάτι που ισχύει ανεξάρτητα
- *Σύνθεση*: αντίστροφη κίνηση

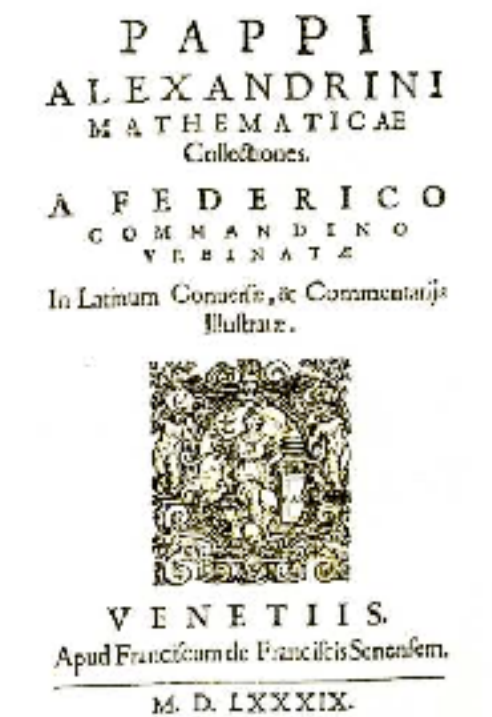
Καρτέσιος (1596-1650)

Rules for the Direction of the Mind (1701)

1. Μην αποδέχεστε τίποτα ως αληθινό που δεν είναι αυτονόητο
2. Χωρίστε τα προβλήματα στα πιο απλά μέρη τους
3. Λύστε προβλήματα προχωρώντας από το απλό στο σύνθετο και
4. Ελέγξτε ξανά το σκεπτικό σας

George Pólya (1887-1985)

Επηρέασε σημαντικά τη Διδακτική των Μαθηματικών και έχει μείνει περισσότερο γνωστός για το έργο του σχετικά με την επίλυση προβλήματος στα Μαθηματικά και πιο συγκεκριμένα το βιβλίο του “How to Solve it” (1945).



Η επίλυση προβλήματος κατά τον Pólya

Είδη προβλημάτων

- προβλήματα εύρεσης
- προβλήματα απόδειξης

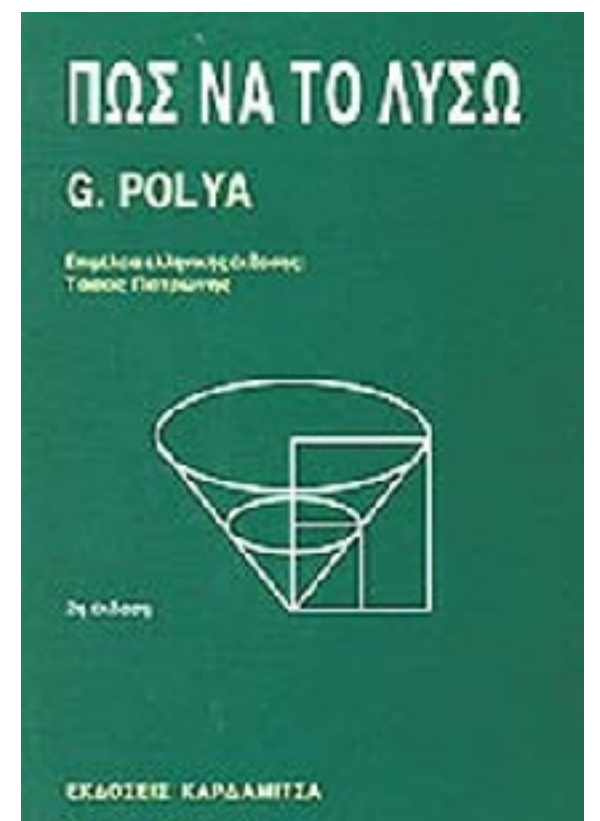
Προβλήματα εύρεσης

Σε ένα πρόβλημα εύρεσης, σκοπός μας είναι να βρούμε το άγνωστο αντικείμενο του προβλήματος, το ζητούμενο, που ικανοποιεί τις **συνθήκες** του προβλήματος όπως αυτές διαμορφώνονται από τα δεδομένα του.

Βήματα επίλυσης ενός προβλήματος

Στο βιβλίο του How to Solve it, ο George Pólya προτείνει ότι η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί σε 4 διακριτά βήματα:

1. Κατανόηση του προβλήματος (***understand***)
2. Επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης (***plan***)
3. Εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης (***solve***)
4. Έλεγχος λύσης (***check***)



Βήματα επίλυσης ενός προβλήματος κατά τον Pólya

1. Κατανόηση του προβλήματος (understand)

- Ποιο είναι το ζητούμενο;
- Ποια είναι τα δεδομένα;
- Μήπως είναι ανεπαρκή ή αντιφατικά τα δεδομένα;
- Μπορώ να φτιάξω ένα σχήμα για να κατανοήσω το πρόβλημα;
- Μπορώ να χωρίσω το πρόβλημα σε επιμέρους ερωτήματα;

2. Επινόηση σχεδίου λύσης (plan)

- Γνωρίζω κάποιο σχετικό/παρόμοιο πρόβλημα;
- Μπορώ να διατυπώσω το πρόβλημα διαφορετικά;
- Μπορώ να λύσω το πρόβλημα με πιο απλούς αριθμούς ή ένα άλλο πρόβλημα;

Βήματα επίλυσης ενός προβλήματος κατά τον Pólya

3. Εκτέλεση σχεδίου επίλυσης (solve)

- διαμορφώνω τα κατάλληλα βήματα για την επίλυση (ενδεχομένως βέβαια να συλλάβω τη λύση διαισθητικά)
- ουσιαστικά πρέπει να «μαθηματικοποιήσω» ή να «μοντελοποιήσω» το σχέδιο

4. Έλεγχος λύσης (check)

- Πραγματοποιώ επαλήθευση
- Ελέγχω αν μπορώ να βελτιώσω την λύση
- Ελέγχω την πορεία επίλυσης, το αποτέλεσμα και τους συλλογισμούς

Επίλυση προβλήματος: Παράδειγμα

Μια από τις βρύσες στο σχολείο μας χάλασε στο διάλειμμα. Ο διευθυντής υπολόγισε ότι σε 15 λεπτά που διαρκεί το διάλειμμα, σπαταλήθηκαν 9 λίτρα νερού. Πόσα λίτρα νερού σπαταλήθηκαν συνολικά μέχρι το επόμενο διάλειμμα (45 λεπτά αργότερα) που την επισκεύασε ο υδραυλικός;

1. Κατανόηση του προβλήματος

- Ποιο είναι το ζητούμενο, ποια τα δεδομένα;
- Ποια είναι η συνθήκη;
- Μήπως είναι ανεπαρκή ή αντιφατικά τα δεδομένα;
- Μπορώ να φτιάξω ένα σχήμα για να κατανοήσω το πρόβλημα;
- Μπορώ να χωρίσω το πρόβλημα σε επιμέρους ερωτήματα;

2. Επινόηση σχεδίου λύσης

- Γνωρίζω κάποιο σχετικό/παρόμοιο πρόβλημα;
- Μπορώ να διατυπώσω το πρόβλημα διαφορετικά;
- Μπορώ να λύσω το πρόβλημα με πιο απλούς αριθμούς ή ένα άλλο πρόβλημα;

3. Εκτέλεση σχεδίου επίλυσης

- διαμορφώνω τα κατάλληλα βήματα για την επίλυση (ενδεχομένως βέβαια να συλλάβω τη λύση διαισθητικά)
- ουσιαστικά πρέπει να «μαθηματικοποιήσω» ή να «μοντελοποιήσω» το σχέδιο

4. Έλεγχος λύσης

- Πραγματοποιώ επαλήθευση
- Ελέγχω αν μπορώ να βελτιώσω την λύση
- Ελέγχω την πορεία επίλυσης, το αποτέλεσμα και τους συλλογισμούς

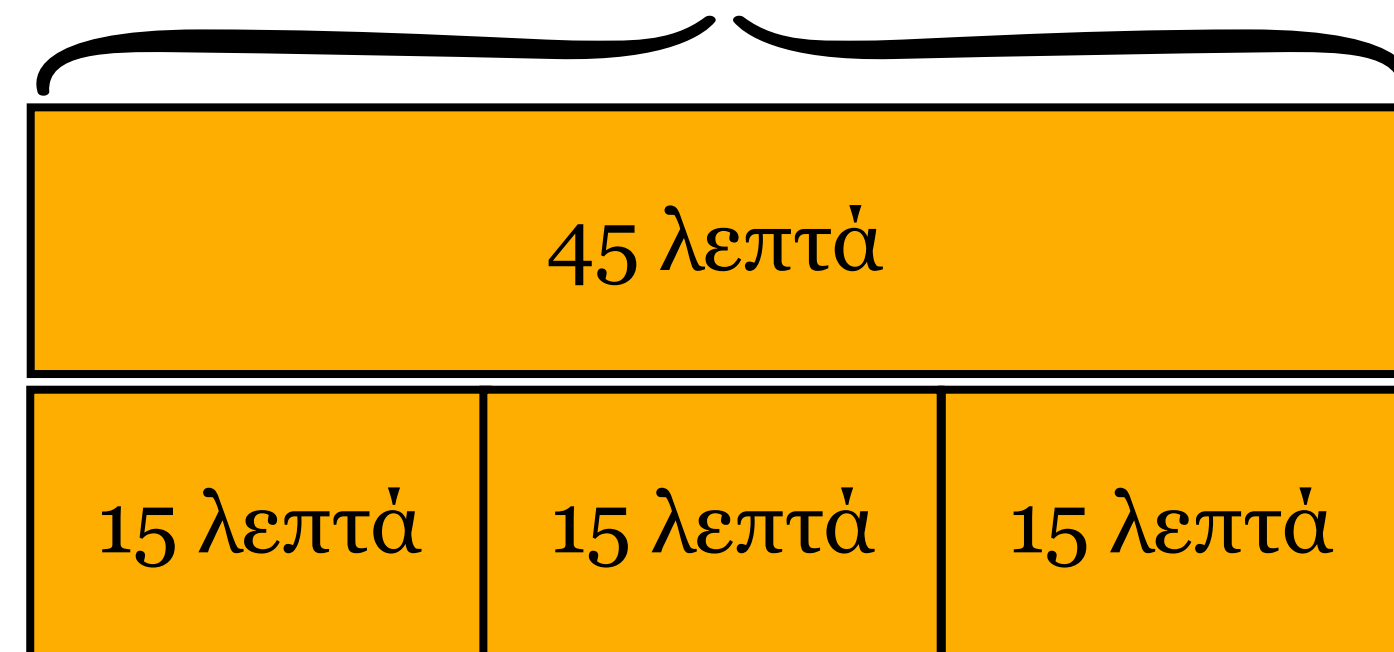
Επίλυση προβλήματος

Μια από τις βρύσες στο σχολείο μας χάλασε στο διάλειμμα. Ο διευθυντής υπολόγισε ότι σε 15 λεπτά που διαρκεί το διάλειμμα, σπαταλήθηκαν 9 λίτρα νερού. Πόσα λίτρα νερού σπαταλήθηκαν συνολικά μέχρι το επόμενο διάλειμμα (45 λεπτά αργότερα) που την επισκεύασε ο υδραυλικός;

Διάλειμμα



Μάθημα



+



=



Στα 15 λεπτά χάθηκαν \rightarrow 9 λίτρα νερού

Στα 60 λεπτά χάθηκαν $\rightarrow x$

$$\frac{15}{60} = \frac{9}{x} \Rightarrow 15 \cdot x = 60 \cdot 9$$

$$\Rightarrow x = \frac{540}{15} = 36$$

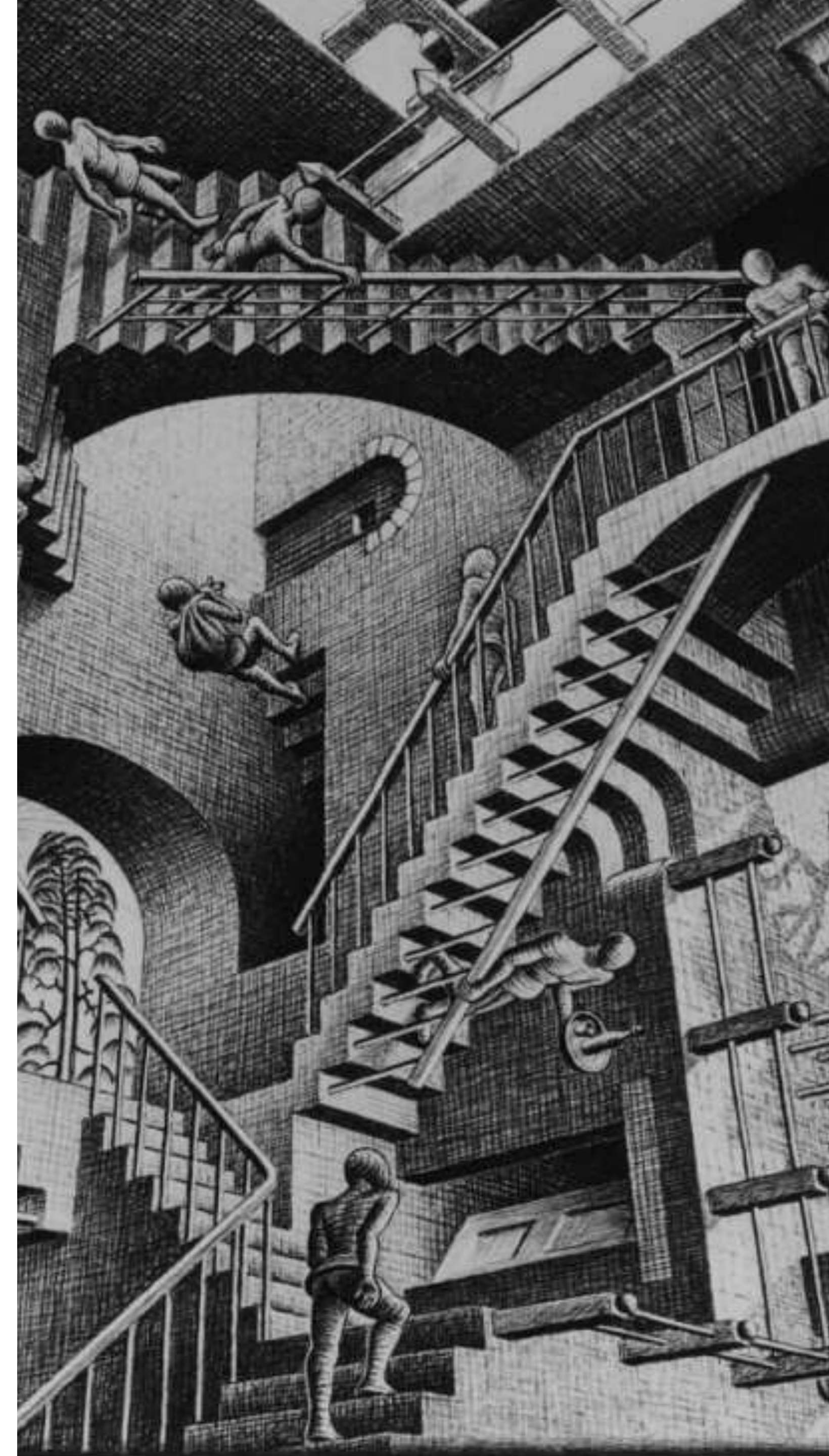
Η επίλυση προβλήματος κατά τον Pólya

Η διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων είναι μια καλλιέργεια της θέλησης.

Λύνοντας προβλήματα, που δεν είναι τόσο εύκολα για αυτόν, ο μαθητής μαθαίνει να επιμένει ακόμα και μετά από αποτυχίες, να εκτιμά μια μικρή πρόοδο, να περιμένει την κρίσιμη ιδέα, να συγκεντρώσει όλες του τις δυνάμεις, όταν η ιδέα αυτή εμφανιστεί.

Αν ο μαθητής δεν είχε την ευκαιρία στο σχολείο να δοκιμάσει τα ποικίλα συναισθήματα της προσπάθειας για τη λύση, αυτό σημαίνει ότι η μαθηματική του εκπαίδευση απέτυχε στο πιο βασικό σημείο (Polya, 1998, σελ. 178).

**4. Προετοιμάζοντας ένα πλάνο
διδασκαλίας των Μαθηματικών
σε 8 βήματα**



Μέρος Α
Αποφάσεις για το
Περιεχόμενο και τις
Δραστηριότητες

1. Καθορίζω τους μαθησιακούς στόχους
2. Λαμβάνω υπόψη τις ανάγκες των μαθητών/-τριών
3. Επιλέγω, σχεδιάζω ή προσαρμόζω μια αξιολογη δραστηριότητα
4. Σχεδιάζω υλικό για την αξιολόγηση του μαθήματος

Προεργασία
στο σπίτι

Μέρος Β
Πλάνο διδασκαλίας

5. Σχεδιάζω το “πριν” της διδασκαλίας
6. Σχεδιάζω το “κατά τη διάρκεια” της διδασκαλίας
7. Σχεδιάζω το “μετά” της διδασκαλίας

Αυτά που θα κάνω
στην τάξη

Μέρος Γ
Αναστοχασμός και
επανασχεδιασμός

8. Αξιολόγηση και επανασχεδιασμός του πλάνου

Κάνω το πλάνο
καλύτερο

Προετοιμάζοντας το πλάνο διδασκαλίας σε 8 βήματα

Μέρος Α

Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

1. Καθορίζω τους μαθησιακούς στόχους

2. Λαμβάνω υπόψη τις ανάγκες των μαθητών/-τριών

3. Επιλέγω, σχεδιάζω ή προσαρμόζω μια αξιολογη δραστηριότητα

4. Σχεδιάζω υλικό για την αξιολόγηση του μαθήματος

Μέρος Β

Πλάνο διδασκαλίας

5. Σχεδιάζω το “πριν” της διδασκαλίας

6. Σχεδιάζω το “κατά τη διάρκεια” της διδασκαλίας

7. Σχεδιάζω το “μετά” της διδασκαλίας

Μέρος Γ

Αναστοχασμός και επανασχεδιασμός

8. Αξιολόγηση και επανασχεδιασμός του πλάνου

Μέρος Α: Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

1. Καθορίζω τους μαθησιακούς στόχους

2. Λαμβάνω υπόψη τις ανάγκες των μαθητών/-τριών

3. Επιλέγω, σχεδιάζω ή προσαρμόζω μια αξιολογητική δραστηριότητα

4. Σχεδιάζω υλικό για την αξιολόγηση του μαθήματος

1. Καθορίζω τους μαθησιακούς στόχους

Αναζητήστε απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

- Τι πρέπει να μπορούν να κάνουν οι μαθητές/τριες μου όταν τελειώσει αυτό το μάθημα;
- Ποιο περιεχόμενο (conceptual: εννοιολογικό¹ και procedural: διαδικαστικό²) είναι σημαντικό;
- Ένας καλός οδηγός για να αναγνωρίσετε τους μαθησιακούς στόχους αποτελεί το ίδιο το σχολικό βιβλίο, το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) και το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ)

¹ Εννοιολογικό: που σχετίζεται με την κατανόηση εννοιών π.χ. τη έννοια του εμβαδού

² Διαδικαστικό: που σχετίζεται με την κατανόηση κάποιας διαδικασίας π.χ. τον υπολογισμό εμβαδού

Μέρος Α: Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

1. Καθορίζω τους μαθησιακούς στόχους

2. Λαμβάνω υπόψη τις ανάγκες των μαθητών/-τριών

3. Επιλέγω, σχεδιάζω ή προσαρμόζω μια αξιολογη δραστηριότητα

4. Σχεδιάζω υλικό για την αξιολόγηση του μαθήματος

2. Λαμβάνω υπόψη τις ανάγκες των μαθητών/τριών
Αναζητήστε απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

- Ποιο πλαίσιο διδασκαλίας μπορεί να είναι ελκυστικό στους μαθητές/τριες;
- Τι μπορεί να γνωρίζουν ήδη οι μαθητές/τριες σχετικά με αυτό το θέμα και πως μπορεί αυτό να χρησιμεύσει ως σημείο εκκίνησης;
- Ποιες παρανοήσεις ίσως πρέπει να αντιμετωπιστούν;
- Ποια μέσα (οπτικά, χειραπτικά) θα μπορούσαν να υποστηρίξουν την κατανόηση των μαθητών/τριών;
- Τι υποστήριξη σε επίπεδο γλώσσας μπορεί να χρειαστεί;

Μέρος Α: Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

1. Καθορίζω τους μαθησιακούς στόχους

2. Λαμβάνω υπόψη τις ανάγκες των μαθητών/-τριών

3. Επιλέγω, σχεδιάζω ή προσαρμόζω μια αξιολογη δραστηριότητα

4. Σχεδιάζω υλικό για την αξιολόγηση του μαθήματος

2.1 Παιδιά με πολιτισμικές και γλωσσικές διαφορές;

- Υπάρχει προηγούμενη γνώση που έχει διδαχθεί σε διαφορετικό πολιτισμικό πλαίσιο;
- Επικεντρώνομαι στη χρήση (απλής) γλώσσας που χρησιμοποιούν τα παιδιά
- Σέβομαι την πρώτη γλώσσα των παιδιών (π.χ. χρησιμοποιείτε λέξεις από τη γλώσσα τους)
- Διδάσκω το απαιτούμενο λεξιλόγιο (π.χ. με χρήση εικόνων)
- Επιδιώκω υποστήριξη από συμμαθητή/συμμαθήτρια

Αγγλικά: twelve = two left over (δύο μετά το δέκα)

Γερμανικά: 26 (sechszwanzig) = έξι και είκοσι (και όχι είκοσι έξι)

Γαλλικά: 80 (quatre-vingt) = τέσσερα είκοσι (σύστημα βασισμένο στο 20 και όχι το 10)

Μέρος Α: Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

1. Καθορίζω τους μαθησιακούς στόχους

2. Λαμβάνω υπόψη τις ανάγκες των μαθητών/-τριών

3. Επιλέγω, σχεδιάζω ή προσαρμόζω μια αξιολόγηση δραστηριότητα

4. Σχεδιάζω υλικό για την αξιολόγηση του μαθήματος

2.2 Παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες;

- Ποιες οργανωτικές, γνωστικές ικανότητες είναι απαραίτητες για να έχει νόημα η δραστηριότητα;
- Ποιες αδυναμίες και δυνατά σημεία έχουν τα παιδιά;
- Δημιουργώ ένα υψηλά δομημένο περιβάλλον
- Χρησιμοποιώ γλώσσα με σαφήνεια
- Δημιουργώ εναλλακτικές μορφές αξιολόγησης
- Επιδιώκω υποστήριξη από συμμαθητή/συμμαθήτρια

Μέρος Α: Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

1. Καθορίζω τους μαθησιακούς στόχους

2. Λαμβάνω υπόψη τις ανάγκες των μαθητών/-τριών

3. Επιλέγω, σχεδιάζω ή προσαρμόζω μια αξιολογη δραστηριότητα

4. Σχεδιάζω υλικό για την αξιολόγηση του μαθήματος

3. Επιλέγω, σχεδιάζω ή προσαρμόζω μια αξιολογη δραστηριότητα

- Τι είδους δραστηριότητα, ασκήσεις ή προβλήματα θα χρησιμοποιήσω;
 - Η δραστηριότητα που θα σχεδιάζω/προσαρμόσω, καλύπτει τους στόχους (βήμα 1) και τις ανάγκες των μαθητών/-τριών μου (βήμα 2);

Μέρος Α: Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

1. Καθορίζω τους μαθησιακούς στόχους

2. Λαμβάνω υπόψη τις ανάγκες των μαθητών/-τριών

3. Επιλέγω, σχεδιάζω ή προσαρμόζω μια αξιολογητική δραστηριότητα

4. Σχεδιάζω υλικό για την αξιολόγηση του μαθήματος

4. Σχεδιάζω υλικό για την αξιολόγηση του μαθήματος
Σκεφτείτε με βάση τα παρακάτω:

- Διαμορφωτική αξιολόγηση (formative assessment): σας επιτρέπει να συλλέξετε πληροφορίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσαρμογή της κατεύθυνσης του μαθήματος στη **μέση** ή για την πραγματοποίηση αλλαγών για την **επόμενη μέρα**, καθώς και για τις ερωτήσεις που θα θέσετε στην “μετά” φάση του μαθήματος
- Αθροιστική αξιολόγηση (summative assessment): σας επιτρέπει να καταγράψετε εάν οι μαθητές έχουν μάθει τους στόχους που έχετε θέσει για το μάθημα

Μέρος Α: Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

Πώς όμως θα διαμορφώσω το υλικό; Ποια γενική κατεύθυνση θα υιοθετήσω;

Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

1. Καθορίζω τους μαθησιακούς στόχους

2. Λαμβάνω υπόψη τις ανάγκες των μαθητών/-τριών

3. Επιλέγω, σχεδιάζω ή προσαρμόζω μια αξιολογη δραστηριότητα

4. Σχεδιάζω υλικό για την αξιολόγηση του μαθήματος

Κίνηση από το «γενικό» στο «ειδικό»

Μαθηματική έννοια ή διαδικασία

Εμπειρία του μαθητή/της μαθήτριας

Κίνηση από το «ειδικό» στο «γενικό»

Πώς όμως θα διαμορφώσω το υλικό; Ποια γενική κατεύθυνση θα υιοθετήσω;

Συνθετικές κρίσεις, επεκτείνουν τη γνώση μας χωρίς να εξαρτώνται από την εμπειρία (a priori)

Μαθηματική έννοια ή διαδικασία

Αφαιρετική σκέψη, σκέψη που βασίζεται σε θεωρητικές αρχές (conceptual thinking)

Κίνηση από το «γενικό» στο «ειδικό»

Η τυπικότητα των Μαθηματικών «μειώνεται»

Η τυπικότητα των Μαθηματικών «αυξάνεται»

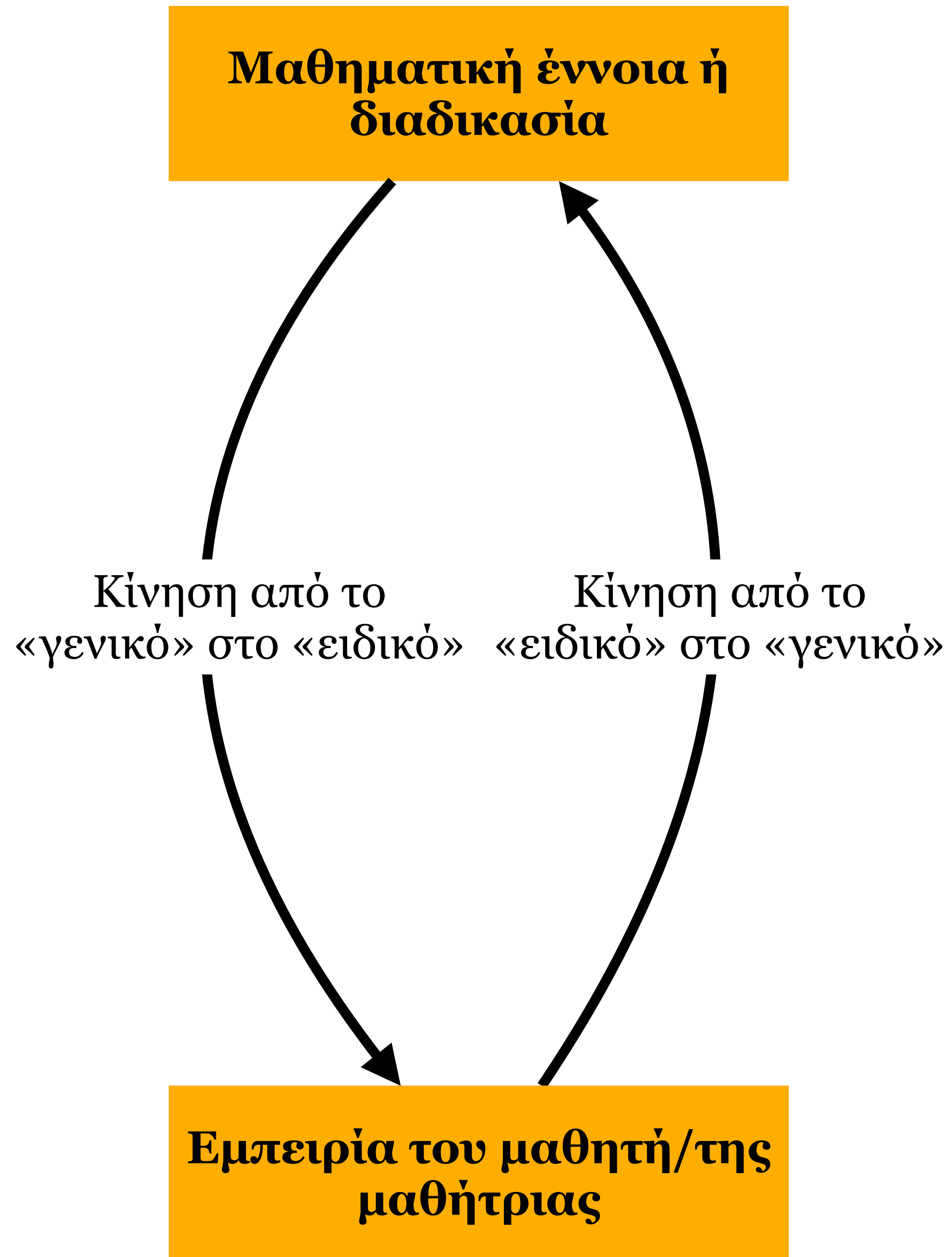
Κίνηση από το «ειδικό» στο «γενικό»

Αναλυτικές κρίσεις, κρίσεις που βασίζονται στην εμπειρία (a posteriori)

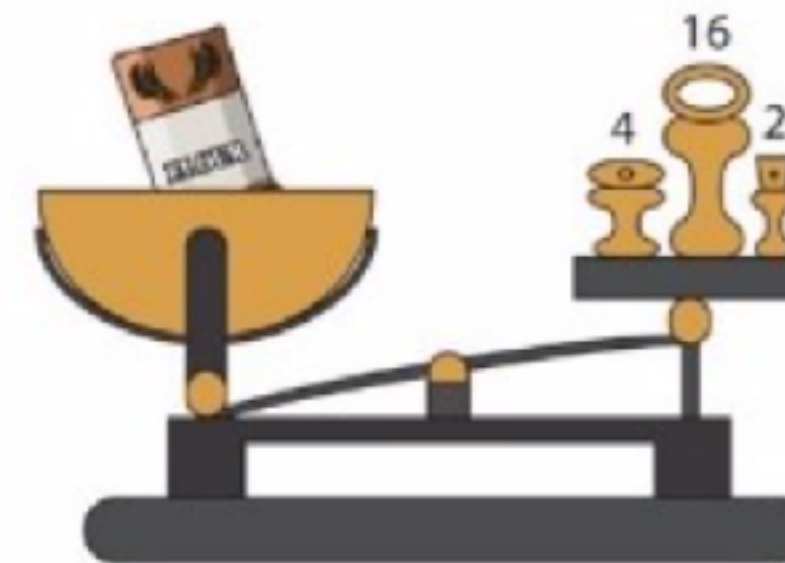
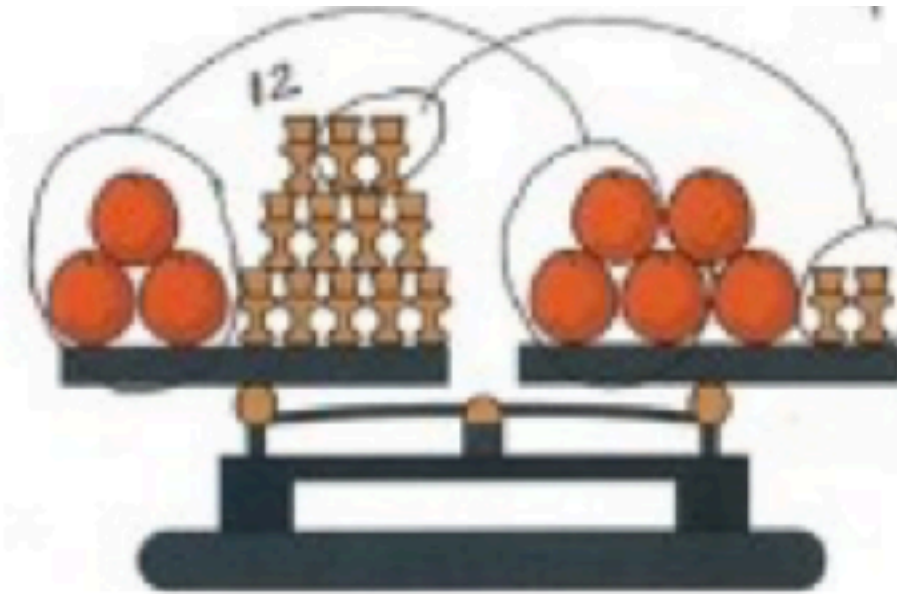
Εμπειρία του μαθητή/της μαθήτριας

Συγκεκριμένη σκέψη, σκέψη που εξαρτάται από την εμπειρία (situational thinking)

Πώς όμως θα διαμορφώσω το υλικό; Ποια γενική κατεύθυνση θα υιοθετήσω;



$$3x + 12 = 5x + 2$$



Επιτυγχάνω τη μετάβαση στα τυπικά Μαθηματικά

Χρησιμοποιώ άτυπες στρατηγικές επίλυσης

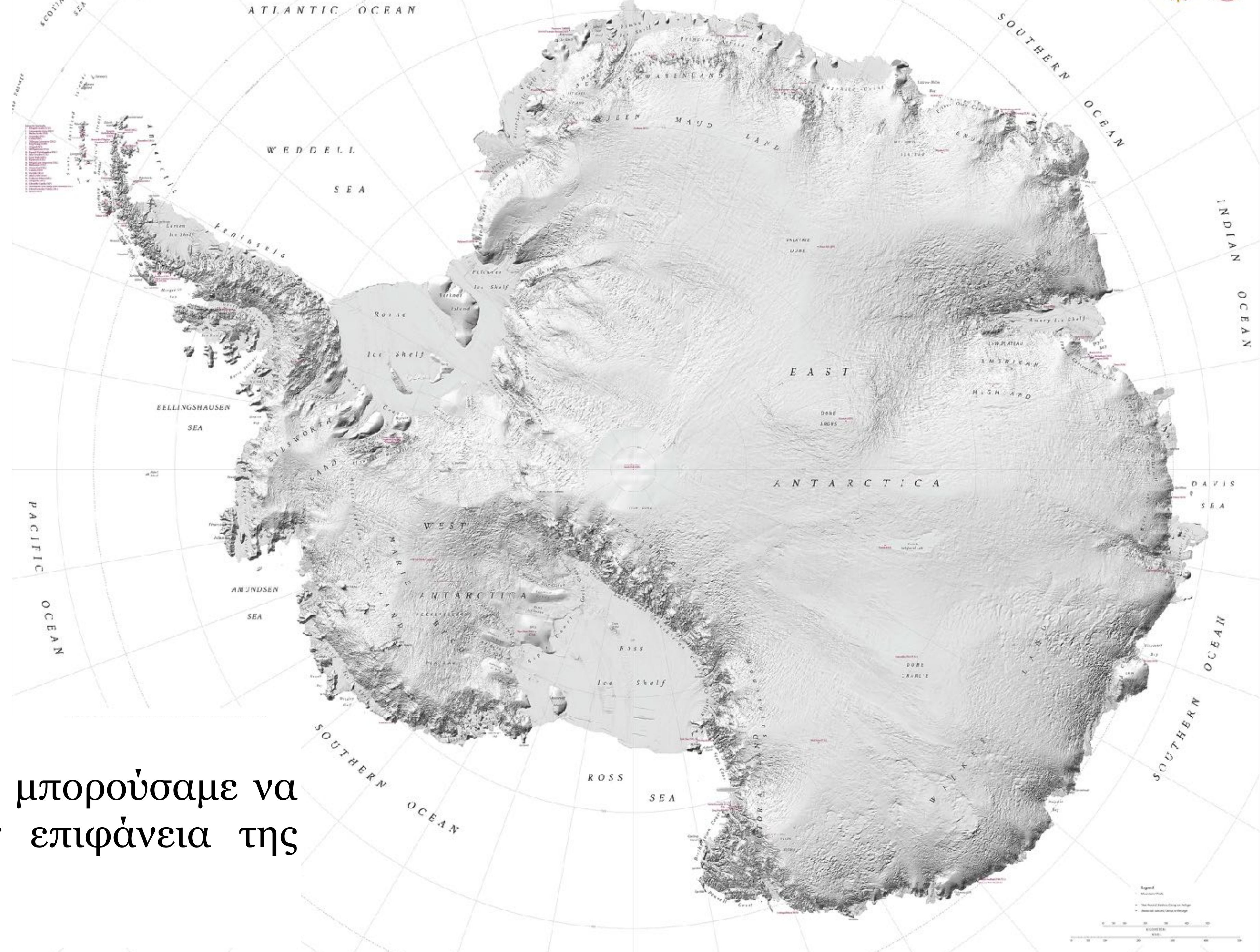
Σιγά σιγά απεμπλέκω το αρχικό πλαίσιο και του δίνω μια πιο αφαιρετική υφή

Ξεκινάω από κάτι που γνωρίζει το παιδί ή που το εισάγω εγώ και αποκτά την εμπειρία

Παράδειγμα



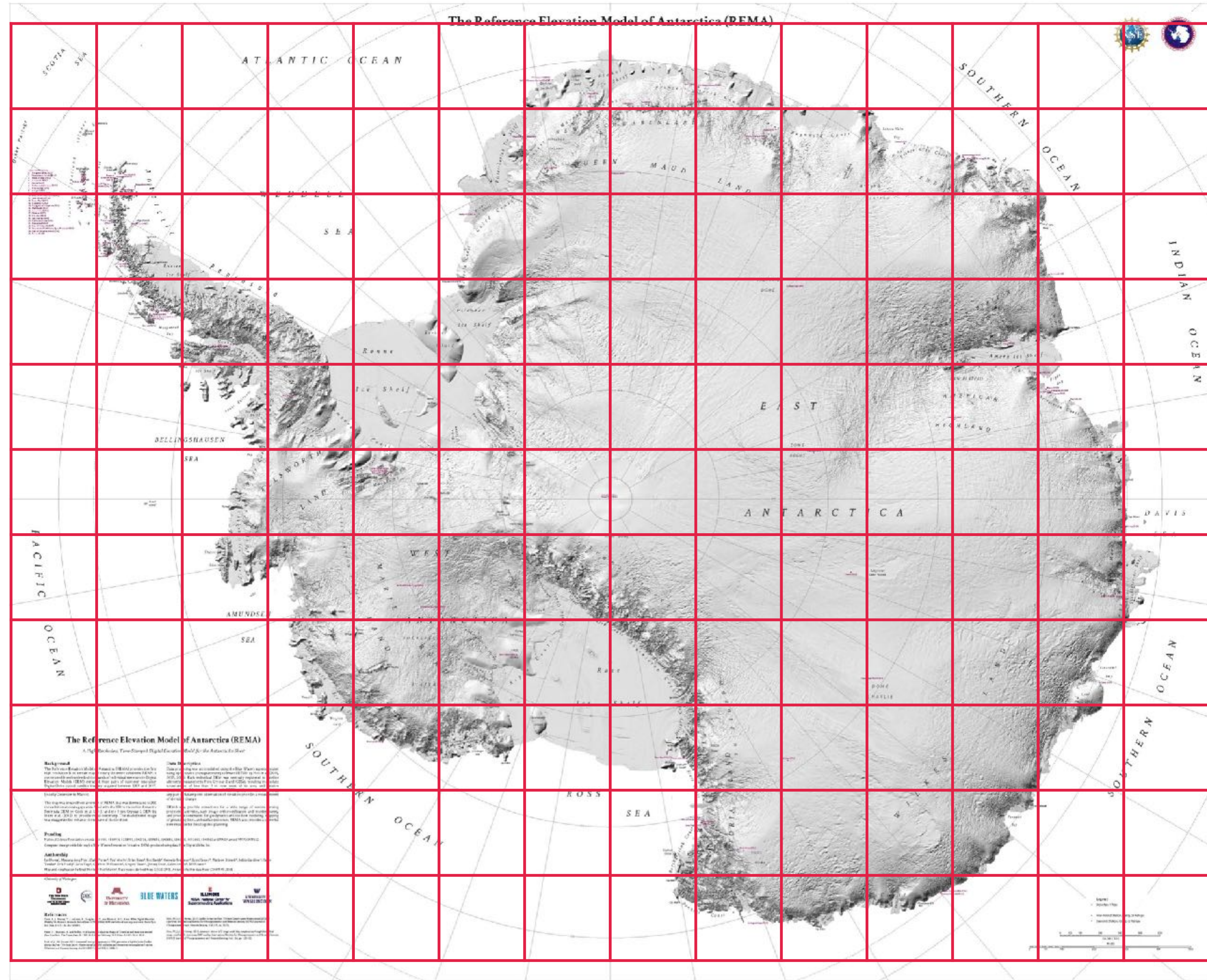
*Τι θα γίνει αν
λιώσουν οι πάγοι
στην Ανταρκτική;*



Με ποιο τρόπο θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την επιφάνεια της Ανταρκτικής;

Το κάθε “τετραγωνάκι” στο διπλανό πλέγμα είναι 400.000 τετραγωνικά χιλιόμετρα περίπου.


Μπορείς να υπολογίσεις την επιφάνεια της Ανταρκτικής;





Το πάχος του πάγου στην Ανταρκτική είναι κατά μέσο όρο 2 χιλιόμετρα.

Ποιος είναι ο συνολικός όγκος του πάγου στην Ανταρκτική;



Η πυκνότητα του πάγου στην Ανταρκτική είναι περίπου το 92% της πυκνότητας του νερού.

Αν λιώσει όλος ο πάγος που βρίσκεται στην Ανταρκτική, πόσο νερό θα απελευθερωθεί;

Μέρος Α: Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

Πώς όμως θα διαμορφώσω το υλικό; Ποια γενική κατεύθυνση θα υιοθετήσω;

Αποφάσεις για το Περιεχόμενο και τις Δραστηριότητες

1. Καθορίζω τους μαθησιακούς στόχους

2. Λαμβάνω υπόψη τις ανάγκες των μαθητών/-τριών

3. Επιλέγω, σχεδιάζω ή προσαρμόζω μια αξιολογη δραστηριότητα

4. Σχεδιάζω υλικό για την αξιολόγηση του μαθήματος

Κίνηση από το «γενικό» στο «ειδικό»

Μαθηματική έννοια ή διαδικασία

Εμπειρία του μαθητή/της μαθήτριας

Κίνηση από το «ειδικό» στο «γενικό»

Διερεύνηση

1. Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται οι πέντε μεγαλύτερες πόλεις της Ελλάδας και οι αριθμοί των κατοίκων τους με βάση την απογραφή του 2011:
- με ακρίβεια και
 - μετά τη στρογγυλοποίηση.

Πόλεις	Πλήθος κατοίκων με ακρίβεια	Πλήθος κατοίκων μετά τη στρογγυλοποίηση
Αθήνα	3.218.218	3.218.000
Θεσσαλονίκη	1.012.597	1.013.000
Πάτρα	168.202	168.000
Ηράκλειο	153.653	154.000
Λάρισα	144.651	145.000

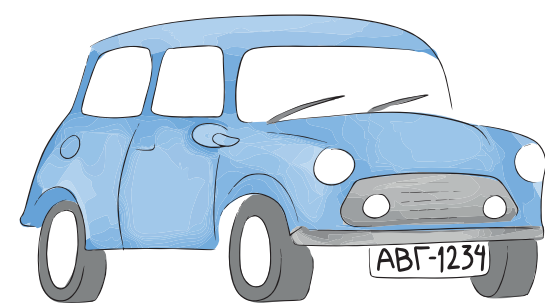
Συγκρίνουμε τους αριθμούς που δείχνουν το πλήθος των κατοίκων κάθε πόλης πριν από τη στρογγυλοποίηση και μετά τη στρογγυλοποίηση.

Ποια ψηφία και σε ποια θέση έχουν αλλάξει σε κάθε αριθμό;

Συζητάμε σε ποια θέση κάθε αριθμού έχει γίνει η στρογγυλοποίηση.

2. Αναφέρουμε περιπτώσεις από την καθημερινή μας ζωή στις οποίες μπορούμε να στρογγυλοποιήσουμε φυσικούς αριθμούς.

Συζητάμε άλλες περιπτώσεις αριθμών στις οποίες δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διαδικασία της στρογγυλοποίησης.



Εξηγούμε γιατί ο αριθμός κυκλοφορίας ενός αυτοκινήτου αναφέρεται πάντα με ακρίβεια.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Η **στρογγυλοποίηση** είναι μια διαδικασία με την οποία μπορούμε να αντικαταστήσουμε έναν αριθμό με κάποιον λίγο μικρότερο ή λίγο μεγαλύτερο του.

Η στρογγυλοποίηση γίνεται ως εξής:

1. Προσδιορίζουμε τη **θέση** του ψηφίου του αριθμού στην οποία θα κάνουμε τη στρογγυλοποίηση.
2. Εξετάζουμε το ψηφίο που βρίσκεται στην **αμέσως επόμενη** δεξιά θέση. Αν είναι:
 - **0, 1, 2, 3 ή 4**, τότε **αντικαθιστούμε** το ψηφίο αυτό και όλα όσα είναι δεξιά του με το 0 και **αφήνουμε ίδιο** το ψηφίο της θέσης στην οποία κάνουμε τη στρογγυλοποίηση.
 - **5, 6, 7, 8 ή 9**, τότε **αντικαθιστούμε** το ψηφίο αυτό και όλα όσα είναι δεξιά του με το 0 και **αυξάνουμε κατά μία μονάδα** το ψηφίο της θέσης στην οποία κάνουμε τη στρογγυλοποίηση.

Παραδείγματα

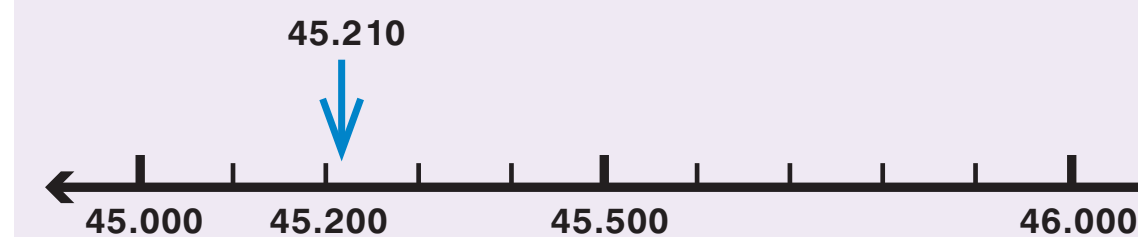
Στρογγυλοποίηση των αριθμών 1.252.678 και 1.256.990:

Δ.Χ.	1.25 2 .678	1.250.000
Ε.Μ.	1.256. 9 40	1.256. 9 00

Δ.Χ.	1.25 6 .990	1.260.000
Ε.Μ.	1.252. 6 78	1.252. 7 00

Εφαρμογή

Να δείξετε τη στρογγυλοποίηση του αριθμού 45.210 στις Εκατοντάδες με τη βοήθεια της αριθμογραμμής:



Ο φυσικός αριθμός 45.210 στην αριθμογραμμή βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς 45.000 και 46.000 και, συγκεκριμένα, είναι πιο κοντά στο 45.000 από ό,τι στο 46.000. Η στρογγυλοποίησή του στις Εκατοντάδες δίνει τον αριθμό 45.200.

Αναστοχασμός

1. Εξηγούμε πώς η στρογγυλοποίηση στις ΕΧ του 83.456.057 δίνει τον αριθμό 83.500.000.
2. Η Αγγελική υπολόγισε ότι το άθροισμα $5.134 + 6.237$ είναι περίπου 11.000. Εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να σκέφτηκε.
3. Η Δανάη υπολόγισε πως η διαφορά $8.978 - 4.209$ είναι περίπου 4.800. Σε ποια θέση στρογγυλοποίησε;
4. Ο Νίκος υπολόγισε πως το γινόμενο 190×110 είναι περίπου 20.000. Σε ποια θέση στρογγυλοποίησε τους παράγοντες του γινομένου;
5. Ο Αντρέι υπολόγισε πως το πηλίκο $3.565 : 6$ είναι περίπου 600. Εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να σκέφτηκε.

Μέρος Β: “γράφω” το πλάνο διδασκαλίας

Πλάνο διδασκαλίας

5. Σχεδιάζω το “πριν” της διδασκαλίας

6. Σχεδιάζω το “κατά τη διάρκεια” της διδασκαλίας

7. Σχεδιάζω το “μετά” της διδασκαλίας

ΠΡΙΝ

Προετοιμάζω

- Ενεργοποιώ προηγούμενες γνώσεις
- Σιγουρεύομαι ότι η δραστηριότητα είναι κατανοητή
- Ορίζω σαφές προσδοκίες

ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Οι μαθητές/-τριες δουλεύουν

- Αφήνω τα παιδιά να δουλέψουν μόνα τους!
- Παρατηρώ τη μαθηματική σκέψη των παιδιών
- Παρέχω κατάλληλη υποστήριξη
- Παρέχω αξιόλογες επεκτάσεις

ΜΕΤΑ

Συζήτηση μέσα στην τάξη

- Δημιουργία μαθηματικής κοινότητας
- Ακούστε ενεργά χωρίς να αξιολογείται τα παιδιά
- Συνοψίστε τις κύριες ιδέες και προσδιορίστε μελλοντικές εργασίες

Στάδιο 1: “πριν”

ΠΡΙΝ

Προετοιμάζω

- Ενεργοποιώ προηγούμενες γνώσεις
- Σιγουρεύομαι ότι η δραστηριότητα είναι κατανοητή
- Ορίζω σαφές προσδοκίες

- Το “πριν” είναι τα πρώτα 5 έως 10 λεπτά ενός μαθήματος.
- Το στάδιο αυτό προορίζεται να προετοιμάσει τους μαθητές για να εργαστούν εστιασμένα ή να εξερευνήσουν μια ενότητα στα Μαθηματικά.
- Στο στάδιο αυτό θα πρέπει να βρείτε τη σωστή ισορροπία δίνοντας αρκετή **δομή** και **καθοδήγηση** στα παιδιά ώστε η δραστηριότητα να είναι προσβάσιμη.

Στάδιο 1: “πριν”

ΠΡΙΝ

Προετοιμάζω

- Ενεργοποιώ προηγούμενες γνώσεις
- Σιγουρεύομαι ότι η δραστηριότητα είναι κατανοητή
- Ορίζω σαφές προσδοκίες

1. **Ενεργοποιώ την προηγούμενη γνώση:** υπενθυμίστε στα παιδιά τι έχουν μάθει προηγουμένως και συνδέστε τις εμπειρίες με τους στόχους της ημέρας.
 - **Ξεκινώ με μια απλούστερη εκδοχή της κύριας δραστηριότητας**
2. **Παρουσιάζω την κύρια δραστηριότητα και σιγουρεύομαι ότι είναι κατανοητή:** πρέπει να είστε βέβαιοι/ες ότι τα παιδιά κατανοούν το πρόβλημα πριν ξεκινήσουν να το λύνουν. Αυτό δεν σημαίνει να εξηγήσετε πώς να το λύσουν, απλώς βεβαιωθείτε ότι το κατανοούν.
3. **Ορίζω σαφείς προσδοκίες:** πρέπει να ορίσετε πώς πρέπει να δουλέψουν τα παιδιά και ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της εργασίας τους

Στάδιο 1: “πριν”

ΠΡΙΝ

Προετοιμάζω

- Ενεργοποιώ προηγούμενες γνώσεις
- Σιγουρεύομαι ότι η δραστηριότητα είναι κατανοητή
- Ορίζω σαφές προσδοκίες

Χρήσιμες ερωτήσεις

- Μήπως μια απλούστερη εκδοχή της δραστηριότητας θα ενεργοποιούσε την προηγούμενη γνώση των παιδιών και θα εισήγαγε κατάλληλο λεξιλόγιο ή/και θα διευκρίνιζε τις προσδοκίες που έχω;
- Με ποιους τρόπους μπορώ να συνδέσω τη δραστηριότητα με προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες των παιδιών από άλλες επιστήμες ή ένα ενδιαφέρον/επίκαιρο γεγονός;
- Ποιες στρατηγικές παρουσίασης ή/και εργαλεία θα ελαχιστοποιήσουν τις παρανοήσεις που ίσως έχουν τα παιδιά και θα αποσαφηνίσουν τις προσδοκίες που έχω;

Στάδιο 2: “κατά τη διάρκεια”

ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Οι μαθητές/-τριες δουλεύουν

- Αφήνω τα παιδιά να δουλέψουν μόνα τους!
- Παρατηρώ τη μαθηματική σκέψη των παιδιών
- Παρέχω κατάλληλη υποστήριξη
- Παρέχω αξιόλογες επεκτάσεις

- Με δεδομένο ότι έχετε κεντρίσει την περιέργεια των παιδιών, μπορούν τώρα να δουλέψουν είτε μόνα ή σε μικρές ομάδες για να εξερευνήσουν, να συλλέξουν και να καταγράψουν πληροφορίες, να κάνουν και να δοκιμάσουν εικασίες και να λύσουν το πρόβλημα που περιέχει η δραστηριότητα σας.
- Σε αυτή τη φάση, οι μαθητές/τριες πρέπει να έχουν πρόσβαση σε διάφορα εργαλεία και μέσα.

Στάδιο 2: “κατά τη διάρκεια”

ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Οι μαθητές/-τριες δουλεύουν

- Αφήνω τα παιδιά να δουλέψουν μόνα τους!
- Παρατηρώ τη μαθηματική σκέψη των παιδιών
- Παρέχω κατάλληλη υποστήριξη
- Παρέχω αξιόλογες επεκτάσεις

1. Αφήνω τα παιδιά να δουλέψουν (και να κάνουν λάθη)!

- Μόλις οι μαθητές/τριες καταλάβουν τι ζητά το πρόβλημα, είναι καιρός να τους αφήσετε να δουλέψουν!
- Ενθαρρύνετε τα παιδιά να αγκαλιάσουν τον “αγώνα”. Το να κάνεις μαθηματικά απαιτεί χρόνο και οι λύσεις δεν είναι πάντα προφανείς.
- Είναι σημαντικό να επικοινωνήσετε στα παιδιά ότι το να αφιερώνουν χρόνο σε μια εργασία, να δοκιμάζουν διαφορετικές προσεγγίσεις και να συμβουλεύονται ο ένας τον άλλον είναι σημαντικό για την εκμάθηση και την κατανόηση των μαθηματικών.

Στάδιο 2: “κατά τη διάρκεια”

ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Οι μαθητές/-τριες δουλεύουν

- Αφήνω τα παιδιά να δουλέψουν μόνα τους!
- Παρατηρώ τη μαθηματική σκέψη των παιδιών
- Παρέχω κατάλληλη υποστήριξη
- Παρέχω αξιόλογες επεκτάσεις

2. Παρατηρώ τη μαθηματική σκέψη των παιδιών

- Αφιερώστε αυτόν τον χρόνο για να μάθετε τι σκέφτονται τα παιδιά, ποιες ιδέες χρησιμοποιούν και πώς προσεγγίζουν το πρόβλημα. Αυτό είναι το στάδιο για παρατήρηση, ακρόαση και αλληλεπίδραση με τα παιδιά.
- «Επαγγελματική παρατήρηση» (professional noticing) σημαίνει ότι προσπαθείτε να κατανοήσετε την προσέγγιση ενός μαθητή σε ένα πρόβλημα και να αποφασίσετε μια κατάλληλη απάντηση για να επεκτείνετε τη σκέψη αυτού του μαθητή στη στιγμή
- Κατά συνέπεια, οι ερωτήσεις σας πρέπει να βασίζονται στον τρόπο εργασίας και τις απαντήσεις των παιδιών σε εσάς (“για πες μου τι κάνεις;” “γιατί...;”)

Στάδιο 2: “κατά τη διάρκεια”

ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Οι μαθητές/-τριες δουλεύουν

- Αφήνω τα παιδιά να δουλέψουν μόνα τους!
- Παρατηρώ τη μαθηματική σκέψη των παιδιών
- Παρέχω κατάλληλη υποστήριξη
- Παρέχω αξιόλογες επεκτάσεις

3. Παρέχω κατάλληλη υποστήριξη

- Εξετάστε τρόπους για να υποστηρίξετε τη σκέψη των παιδιών χωρίς να αφαιρέσετε την ευθύνη τους από το να λύσουν το πρόβλημα με τρόπο που έχει νόημα για αυτά

4. Παρέχω αξιόλογες επεκτάσεις

- Τα παιδιά λύνουν προβλήματα με διαφορετικούς ρυθμούς. Προβλέψτε πώς μπορείτε να επεκτείνετε ένα πρόβλημα με έναν ενδιαφέροντα τρόπο για όσα παιδιά τελειώνουν νωρίς (χωρίς να φαίνεται σαν επιπλέον δουλειά) ή για εκείνα που δεν μπορούν να ολοκληρώσουν το πρόβλημα.

Στάδιο 2: “κατά τη διάρκεια”

ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Οι μαθητές/-τριες δουλεύουν

- Αφήνω τα παιδιά να δουλέψουν μόνα τους!
- Παρατηρώ τη μαθηματική σκέψη των παιδιών
- Παρέχω κατάλληλη υποστήριξη
- Παρέχω αξιόλογες επεκτάσεις

Σχόλια

- Αποτελεί ευκαιρία τέλεια για να παρατηρήσετε τι και πώς σκέφτονται οι μαθητές/τριες
- Προετοιμάστε προσεκτικά εκφράσεις/ερωτήσεις που μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά που ίσως “κολλήσουν” ή που μπορεί να χρειάζονται βοήθεια για να ξεκινήσουν
- Θα πρέπει να έχετε επιλογές με έξτρα υλικά και χειραπτικά μέσα
- Προετοιμάστε επεκτάσεις της δραστηριότητας σας που ίσως θέσετε στα παιδιά
- Σκεφτείτε ποιες ομάδες θα μπορούσαν να μοιραστούν τη δουλειά τους και με ποια σειρά, στην επόμενη φάση του μαθήματος.

Στάδιο 3: “μετά”

ΜΕΤΑ

Συζήτηση μέσα στην τάξη

- Δημιουργία μαθηματικής κοινότητας
- Ακούστε ενεργά χωρίς να αξιολογείται τα παιδιά
- Συνοψίστε τις κύριες ιδέες και προσδιορίστε μελλοντικές εργασίες

1. Δημιουργία μαθηματικής κοινότητας

- Εμπλέξτε την τάξη σε παραγωγική συζήτηση, βοηθώντας τους μαθητές/τις μαθήτριες να εργαστούν μαζί ως κοινότητα.
- Σε μια κοινότητα, τα παιδιά νιώθουν άνετα να πάρουν ρίσκα και να μοιραστούν ιδέες, σέβονται ο ένας τις ιδέες του άλλου ακόμα και όταν διαφωνούν, και οι ιδέες υπερασπίζονται και αμφισβητούνται με σεβασμό και εκτιμάται ο λογικός ή μαθηματικός συλλογισμός.

Στάδιο 3: “μετά”

ΜΕΤΑ

Συζήτηση μέσα στην τάξη

- Δημιουργία μαθηματικής κοινότητας
- Ακούστε ενεργά χωρίς να αξιολογείται τα παιδιά
- Συνοψίστε τις κύριες ιδέες και προσδιορίστε μελλοντικές εργασίες

2. Ακούστε ενεργά χωρίς να αξιολογείται τα παιδιά

- Ο στόχος εδώ είναι να παρατηρήσετε τη μαθηματική σκέψη των παιδιών και να κάνετε αυτή τη σκέψη ορατή σε άλλους μαθητές/άλλες μαθήτριες.
- Όταν λειτουργείτε ως μέλος της κοινότητας της τάξης και όχι ως αξιολογητής, οι μαθητές/τριες θα είναι πιο πρόθυμοι/μες να μοιραστούν τις ιδέες τους κατά τη διάρκεια των συζητήσεων
- Αντισταθείτε στον πειρασμό να κρίνετε την ορθότητα μιας απάντησης!

Στάδιο 3: “μετά”

ΜΕΤΑ

Συζήτηση μέσα στην τάξη

- Δημιουργία μαθηματικής κοινότητας
- Ακούστε ενεργά χωρίς να αξιολογείται τα παιδιά
- Συνοψίστε τις κύριες ιδέες και προσδιορίστε μελλοντικές εργασίες

3. Συνοψίστε τις κύριες ιδέες και προσδιορίστε μελλοντικές εργασίες

- Ένας κύριος στόχος της “μετά” φάσης είναι να επισημοποιήσει τις κύριες ιδέες του μαθήματος, κάνοντας συνδέσεις μεταξύ στρατηγικών επίλυσης ή διαφορετικών μαθηματικών ιδεών
- Είναι επίσης η κατάλληλη φάση να ενισχύσουμε την κατάλληλη ορολογία, ορισμούς ή σύμβολα
- Προκαλέστε τους μαθητές/τις μαθήτριες σας να σκεφτούν πέρα από την τρέχουσα δραστηριότητα.

Στάδιο 3: “μετά”

ΜΕΤΑ

Συζήτηση μέσα στην τάξη

- Δημιουργία μαθηματικής κοινότητας
- Ακούστε ενεργά χωρίς να αξιολογείτε τα παιδιά
- Συνοψίστε τις κύριες ιδέες και προσδιορίστε μελλοντικές εργασίες

Χρήσιμες ερωτήσεις

- Πώς θα οργανώσετε τη συζήτηση για να επιτύχετε τους μαθηματικούς στόχους;
- Ποιες ερωτήσεις θα κάνετε για να βοηθήσετε τους μαθητές/τις μαθήτριες να κατανοήσουν τα μαθηματικά, να κάνουν συνδέσεις με άλλα μαθηματικά, να δουν μοτίβα και να κάνουν γενικεύσεις;
- Πώς θα εμπλέξετε όλους τους μαθητές/όλες τις μαθήτριες (με την πάροδο του χρόνου, όχι σε κάθε μάθημα);
- Ποια στοιχεία αναζητάτε που θα σας πουν ότι οι μαθητές/τριες καταλαβαίνουν;

Μέρος Γ: Αξιολόγηση του πλάνου διδασκαλίας

Αναστοχασμός και
επανασχεδιασμός

8. Αξιολόγηση και
επανασχεδιασμός του πλάνου

8. Αξιολόγηση και επανασχεδιασμός του πλάνου

- Ένα καλά προετοιμασμένο μάθημα μεγιστοποιεί την ευκαιρία των παιδιών να μάθουν
- Τα βήματα 5, 6 και 7 καταλήγουν σε ένα δοκιμαστικό πλάνο μαθήματος. Το τελευταίο βήμα είναι να αναθεωρήσετε αυτό το δοκιμαστικό πλάνο υπό το φως των εκτιμήσεων/στόχων του μαθήματος που καθορίζονται στα βήματα 1-4, κάνοντας αλλαγές ή προσθήκες
- Συχνά υπάρχει ο πειρασμός να κάνετε μια σειρά από «διασκεδαστικές» δραστηριότητες που φαίνεται να σχετίζονται με ένα θέμα αλλά έχουν διαφορετικούς μαθησιακούς στόχους.
- Ελέγξτε αν οι στόχοι, η αξιολόγηση και οι ερωτήσεις είναι ευθυγραμμισμένες. Εάν όλες οι ερωτήσεις στοχεύουν μόνο έναν στόχο, προσθέστε ερωτήσεις για την αντιμετώπιση κάθε στόχου ή αφαιρέστε τον στόχο που δεν επιλύεται