

Εισαγωγή στη θεωρία Πιθανοτήτων και την Στατιστική

Πιθανότητες – Θεωρία Συνόλων – Ιδιότητες

Δειγματικός χώρος

- Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται με Ω
- Κάθε στοιχείο ενός δειγματικού χώρου, δηλαδή κάθε δυνατό αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης, ονομάζεται **δειγματικό σημείο**.
- Αν ένα πείραμα τύχης έχει πεπερασμένο πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων, έστω τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος ονομάζεται **πεπερασμένος δειγματικός χώρος**.
- Αν το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης είναι αριθμήσιμο απειροσύνολο ο δειγματικός χώρος του πειράματος ονομάζεται **αριθμησίμως άπειρος δειγματικός χώρος**.

Ενδεχόμενα

- Σύνολα από δειγματικά σημεία ή αλλιώς, συγκεκριμένα υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω , συμπεριλαμβανομένων του κενού $\emptyset$ και του δειγματικού χώρου Ω ονομάζονται **ενδεχόμενα** και συμβολίζονται με A, B, Γ
- Αν ένα ενδεχόμενο αποτελείται από μόνο ένα δειγματικό σημείο ονομάζεται **απλό ενδεχόμενο** ενώ αν αποτελείται από περισσότερα από ένα δειγματικά σημεία ονομάζεται **σύνθετο ενδεχόμενο**,
- Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A συμβολίζεται **$N(A)$**

Ενδεχόμενα

- Ο δειγματικός χώρος Ω ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο** γιατί εμφανίζεται/πραγματοποιείται πάντοτε (αφού περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος).
- Το **κενό ενδεχόμενο** (συμβολίζεται με $\emptyset$) ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο** γιατί δεν εμφανίζεται/πραγματοποιείται ποτέ (αφού δεν περιέχει κανένα στοιχείο).

Εφαρμογή 1

Ρίχνουμε ένα νόμισμα μέχρι να εμφανισθεί για πρώτη φορά κεφαλή

Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα

$$A = \{κ\},$$

$$B = \{γκ, γγκ\},$$

$$\Gamma = \{γγγκ\},$$

$$\Delta = \{κ, γκ, γγκ, γγγκ\}$$

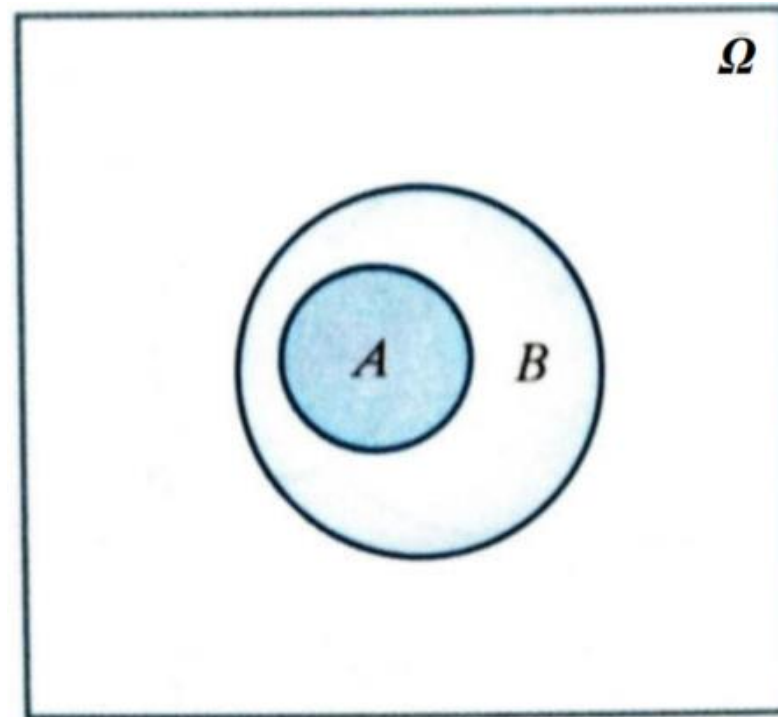
$$E = \{γγγκ, γγγγκ, γγγγγγκ, \dots\}$$

Πότε πραγματοποιείται καθένα από αυτά;

Υποσύνολο ενδεχομένου

Εστω δυο ενδεχόμενα A , B τον δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης. Λέμε ότι το ενδεχόμενο A συνεπάγεται το ενδεχόμενο B ή ότι το ενδεχόμενο A είναι **υποσύνολο** του ενδεχομένου B , αν όταν πραγματοποιηθεί το A πραγματοποιείται και το B .

$$A \subseteq B$$



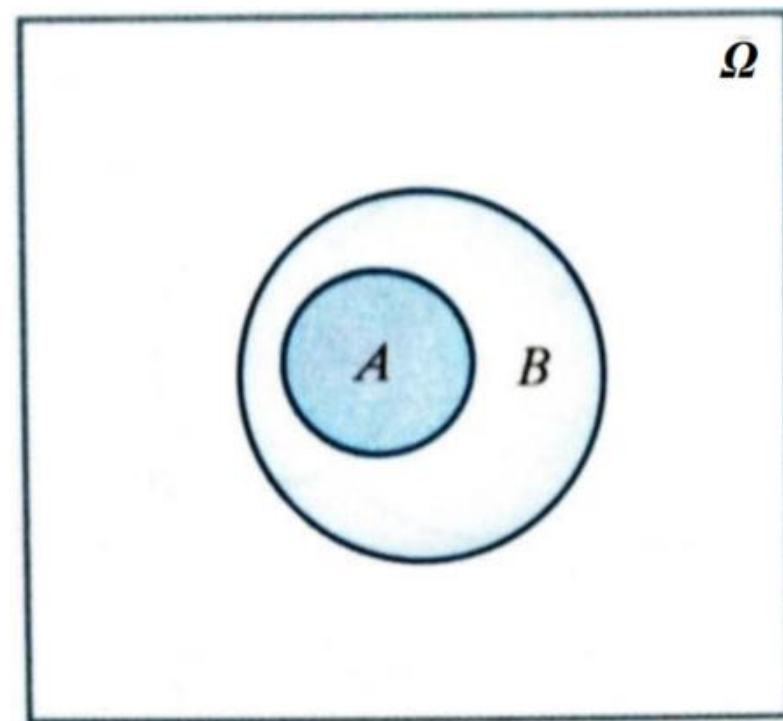
Υποσύνολο ενδεχομένου

A: Οι μαθητές που παίζουν κιθάρα.

B: Οι μαθητές που παίζουν μουσικά όργανα.

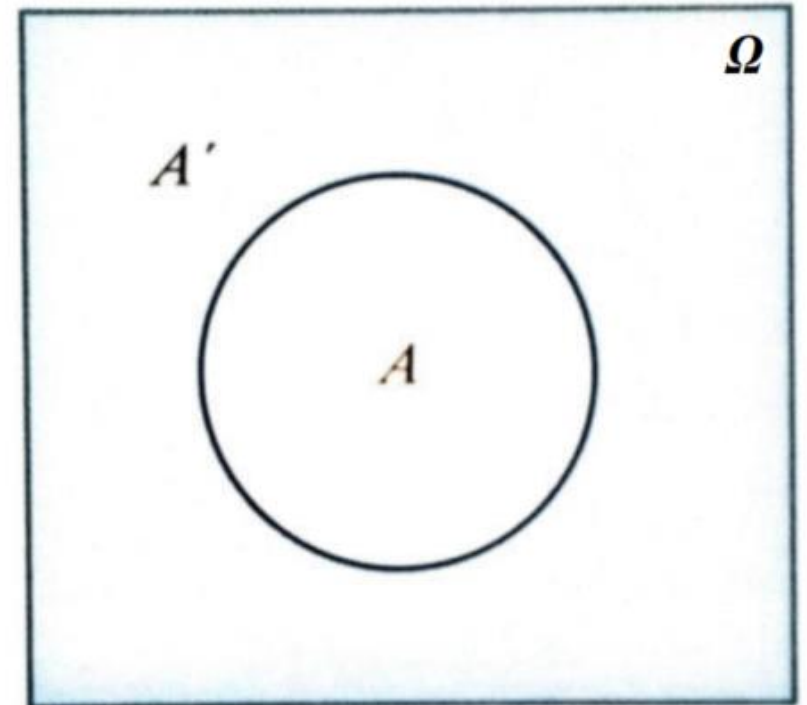
Όλοι οι μαθητές που παίζουν κιθάρα ανήκουν στην ομάδα των μαθητών που παίζουν μουσικά όργανα.

$$A \subseteq B$$



Συμπλήρωμα

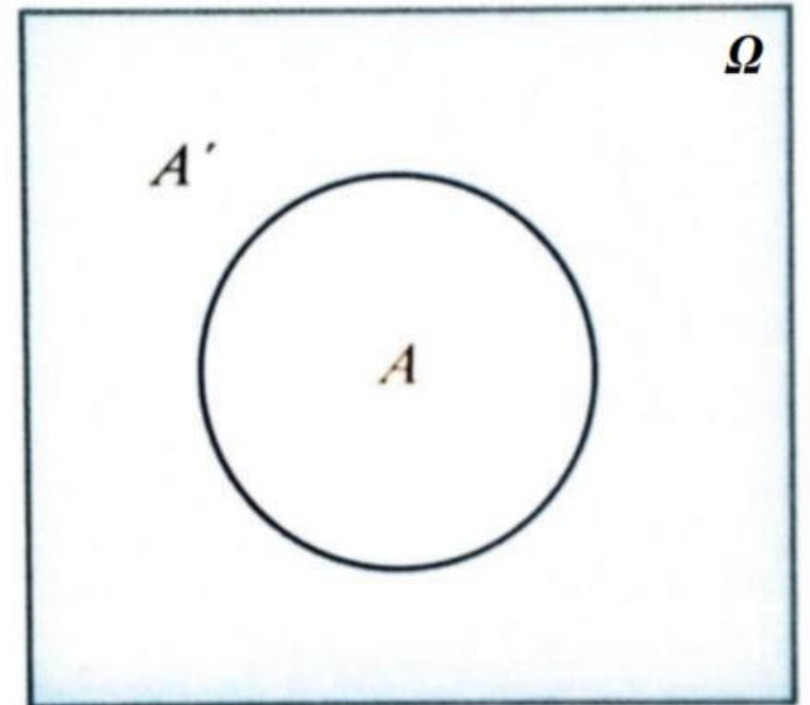
Συμπλήρωμα ή αντίθετο ενός ενδεχομένου A του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται αν και μόνο αν δεν πραγματοποιείται το A και συμβολίζεται με A'



Συμπλήρωμα

A : Τα άτομα που έχουν αδέρφια.

A' : Τα άτομα που δεν έχουν αδέρφια.



Ένωση ενδεχομένων

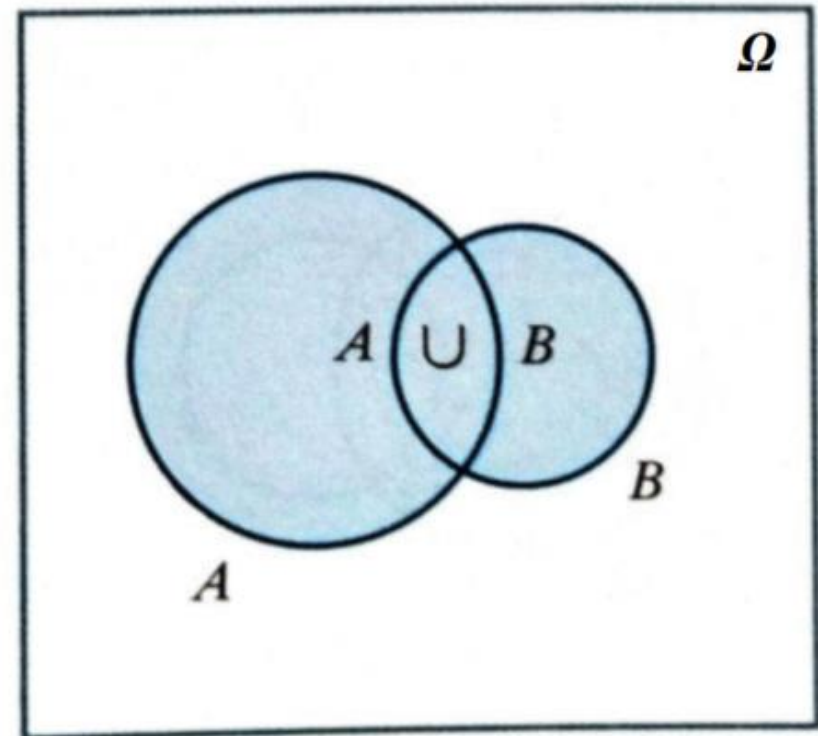
Ένωση δύο ενδεχομένων A, B του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B .

$$A \cup B$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cup A' = \Omega$$



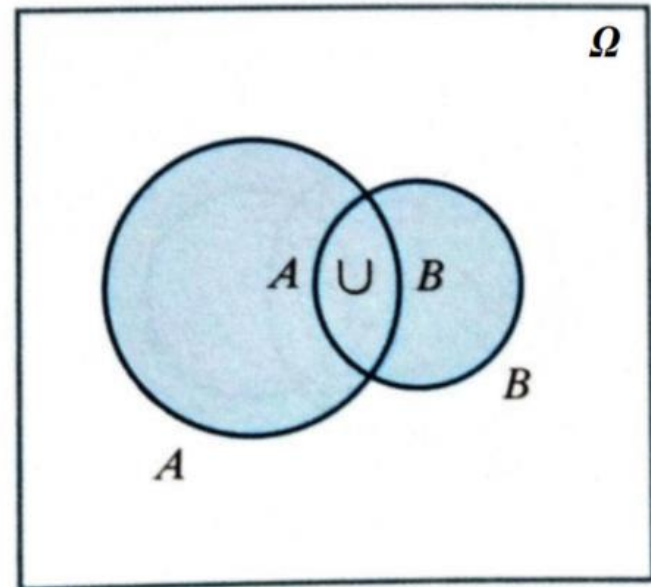
Ένωση ενδεχομένων

A: Οι άνθρωποι που προτιμούν τον καφέ.

B: Οι άνθρωποι που προτιμούν το τσάι.

A ∪ B: Οι άνθρωποι που προτιμούν είτε καφέ, είτε τσάι, είτε και τα δύο.

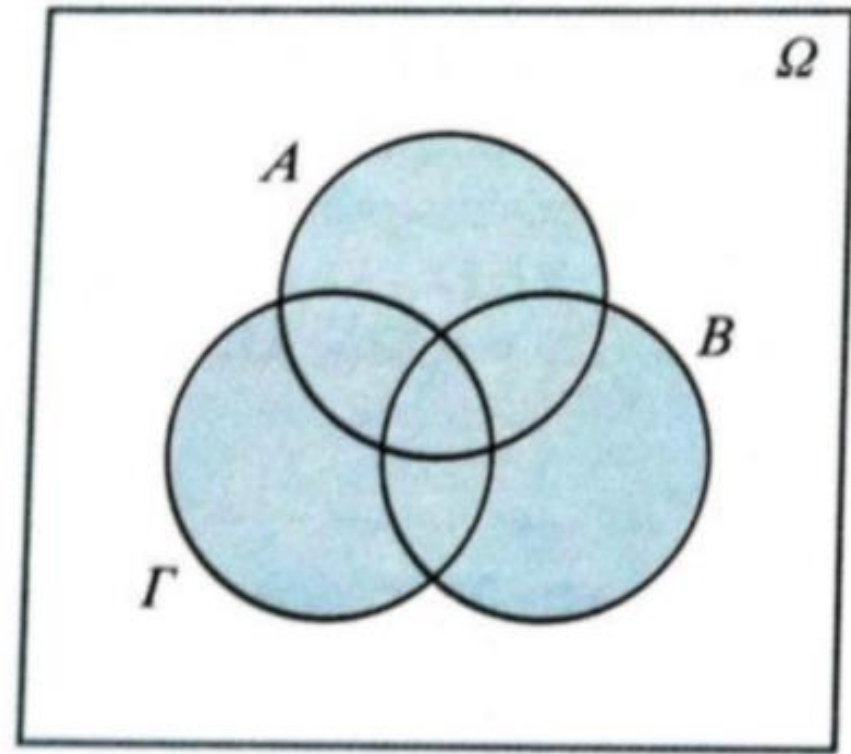
A ∪ B



Ένωση ενδεχομένων

Η πράξη της ένωσης δύο ενδεχομένων επεκτείνεται εύκολα για τρία ή περισσότερα ενδεχόμενα.

$$A \cup B \cup \Gamma$$



Τομή ενδεχομένων

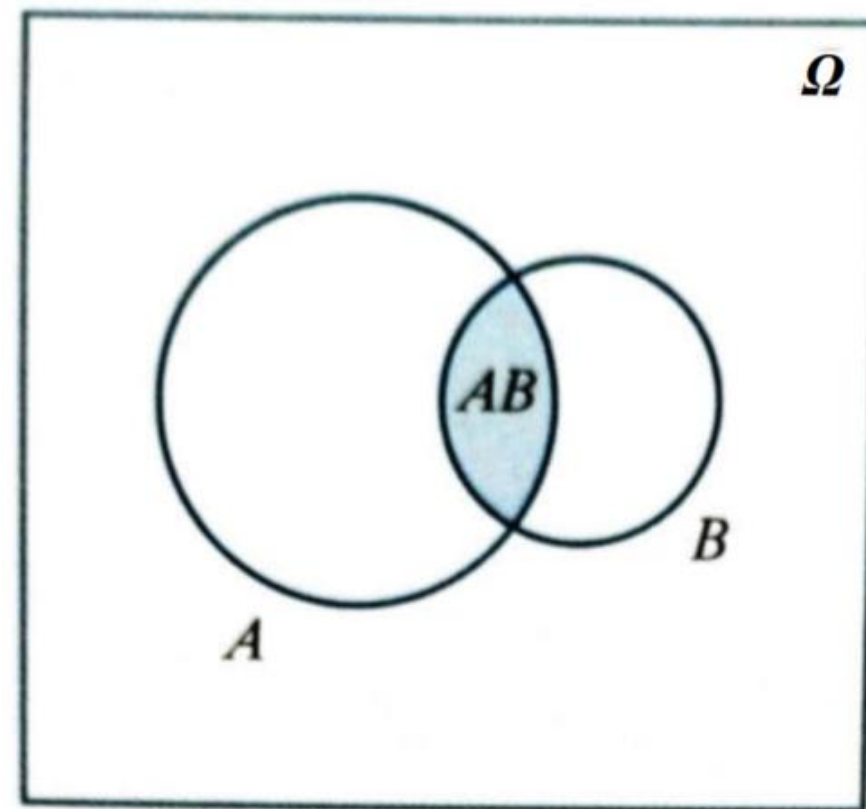
Τομή δύο ενδεχομένων A, B τον δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα A, B

$$\mathbf{A \cap B \quad \acute{\eta} \quad AB}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$A \cap A' = \emptyset$$



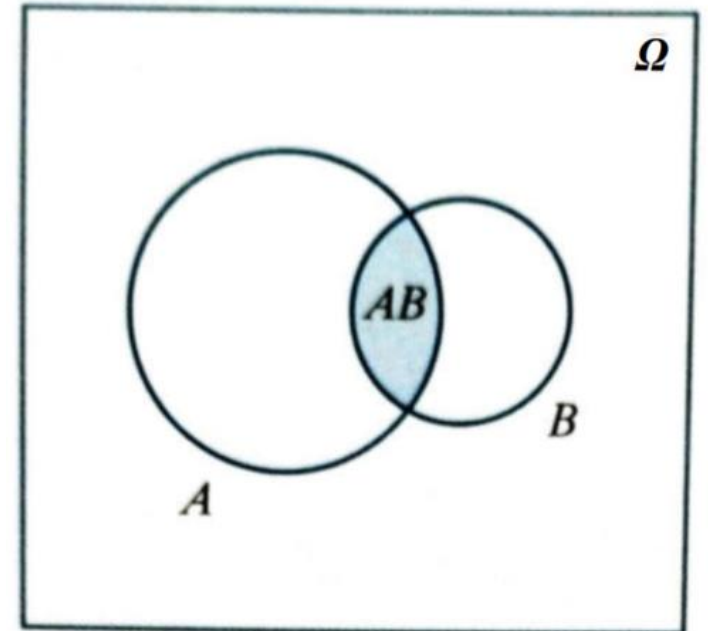
Τομή ενδεχομένων

A: Οι μαθητές που διαβάζουν βιβλία.

B: Οι μαθητές που παρακολουθούν ταινίες.

$A \cap B$: Οι μαθητές που διαβάζουν βιβλία και παρακολουθούν ταινίες.

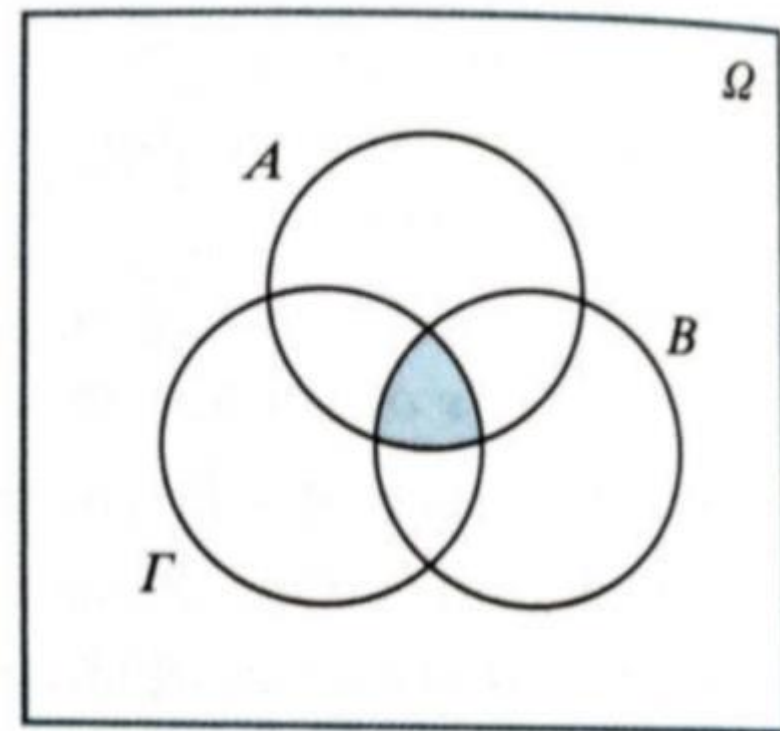
$A \cap B$ ή AB



Τομή ενδεχομένων

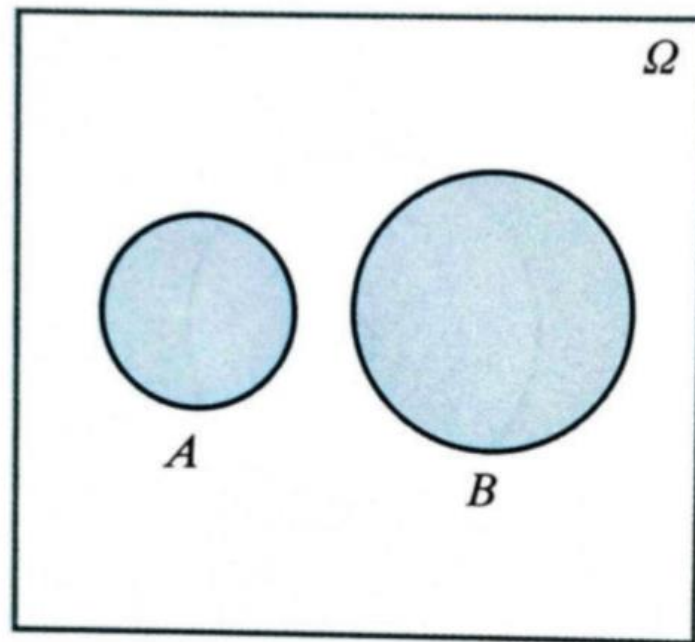
Η πράξη της τομής δύο ενδεχομένων επεκτείνεται εύκολα για τρία ή περισσότερα ενδεχόμενα.

$$\mathbf{A \cap B \cap \Gamma}$$



Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

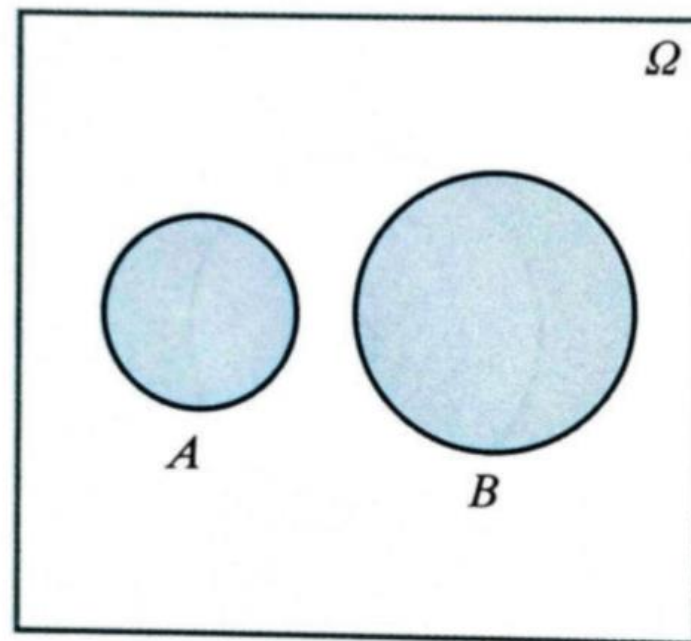
Δύο ενδεχόμενα A , B του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης ονομάζονται **ξένα ή ασυμβίβαστα** ενδεχόμενα αν δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, δηλαδή η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου.



Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

A: Οι μαθητές που έχουν πράσινα μάτια.

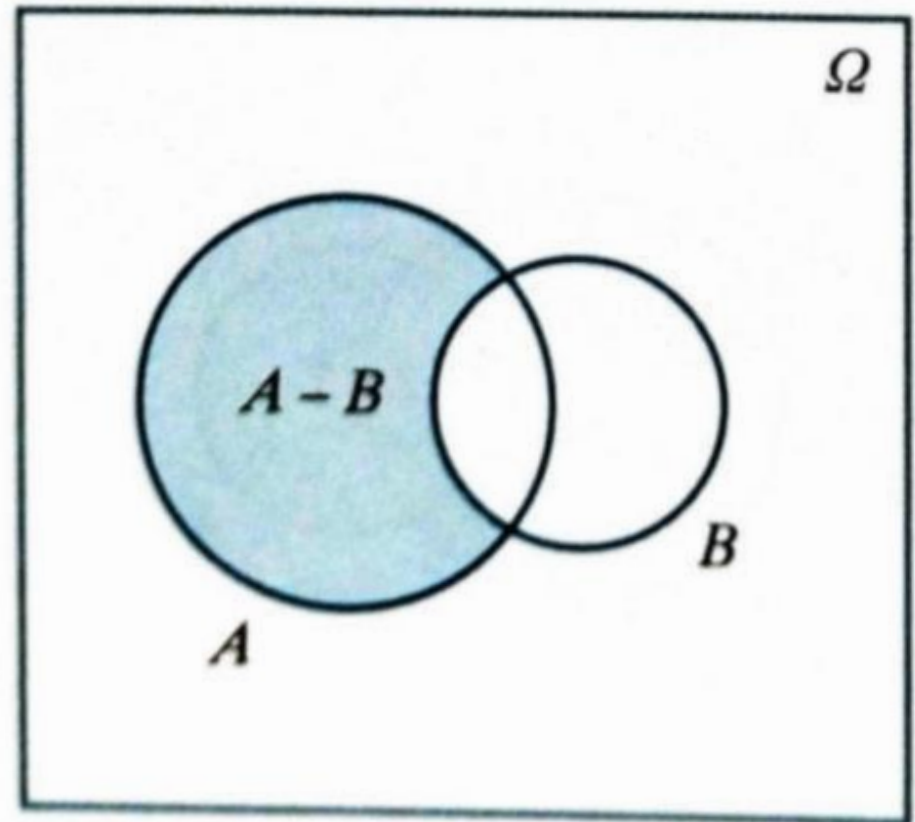
B: Οι μαθητές που έχουν μαύρα μάτια.



Διαφορά ενδεχομένων

Η **διαφορά** του ενδεχομένου B από το ενδεχόμενο A , είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί το A και δεν πραγματοποιηθεί το B .

$$\mathbf{A - B = A \cap B'}$$



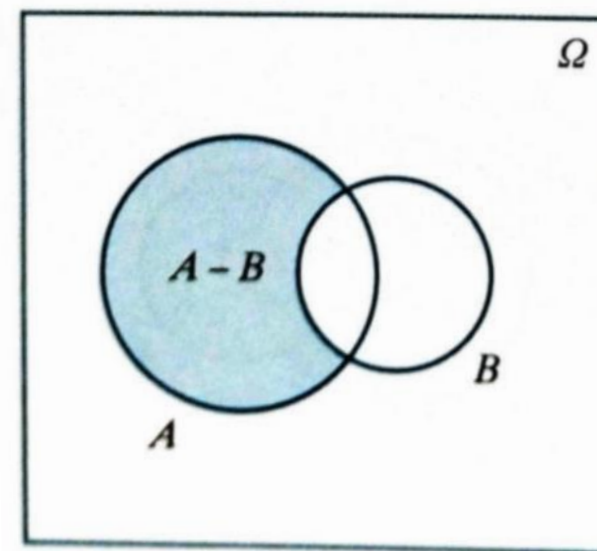
Διαφορά ενδεχομένων

A: Οι μαθητές που παρακολουθούν μαθήματα χορού.

B: Οι μαθητές που παρακολουθούν μαθήματα μουσικής.

A-B: Οι μαθητές που παρακολουθούν μόνο μαθήματα χορού και όχι μουσικής.

$$\mathbf{A - B = A \cap B'}$$



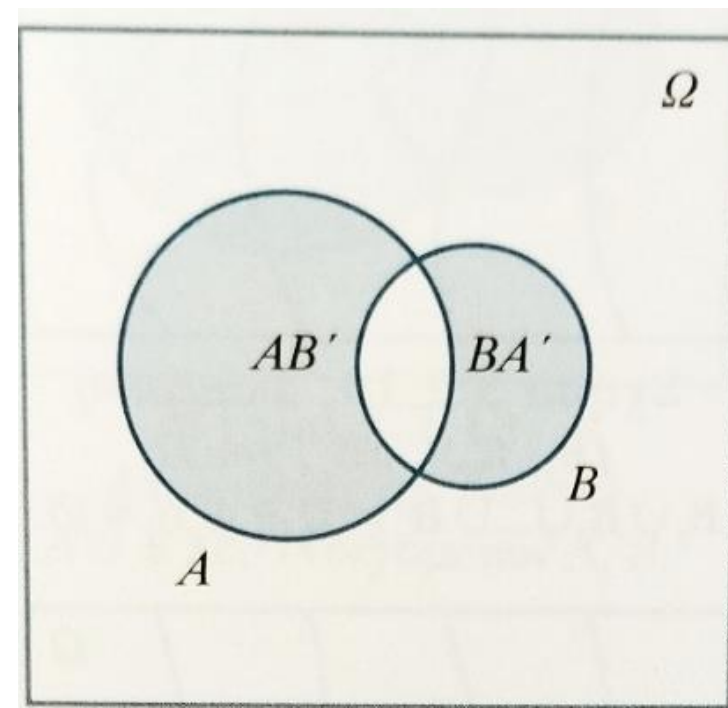
Συμμετρική διαφορά ενδεχομένων

Η **συμμετρική διαφορά** των ενδεχομένων A, B του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, είναι ένα ενδεχόμενο το οποίο πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί μόνο ένα (ακριβώς ένα) από τα ενδεχόμενα A, B , δηλαδή όταν πραγματοποιηθεί ένα από τα A, B χωρίς να πραγματοποιηθεί το άλλο

$$AB' \cup BA'$$

ή

$$(A-B) \cup (B-A)$$



Συμμετρική διαφορά ενδεχομένων

A: Οι άνθρωποι που τους αρέσει ο καφές.

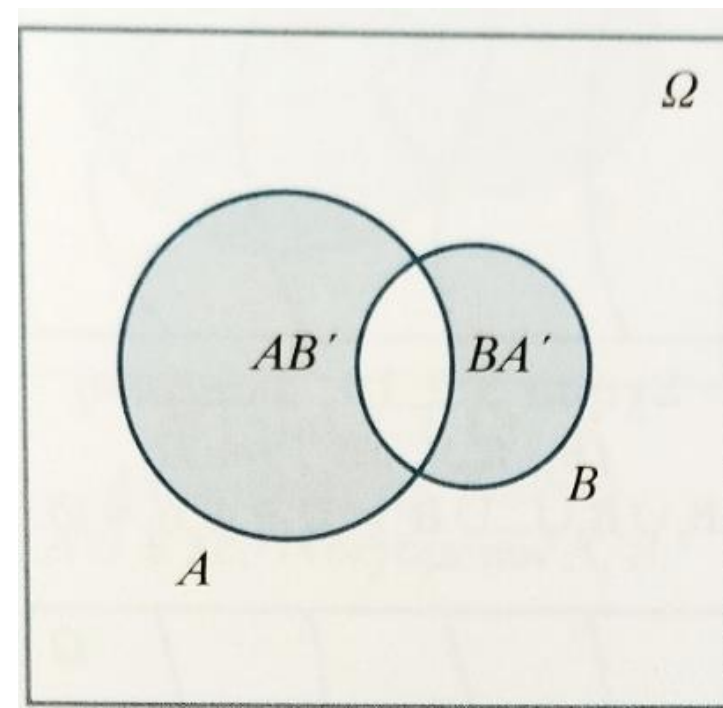
B: Οι άνθρωποι που τους αρέσει το γάλα.

$AB' \cup BA'$: Οι άνθρωποι που προτιμούν μόνο καφέ ή μόνο γάλα αλλά όχι και τα δύο.

$AB' \cup BA'$

ή

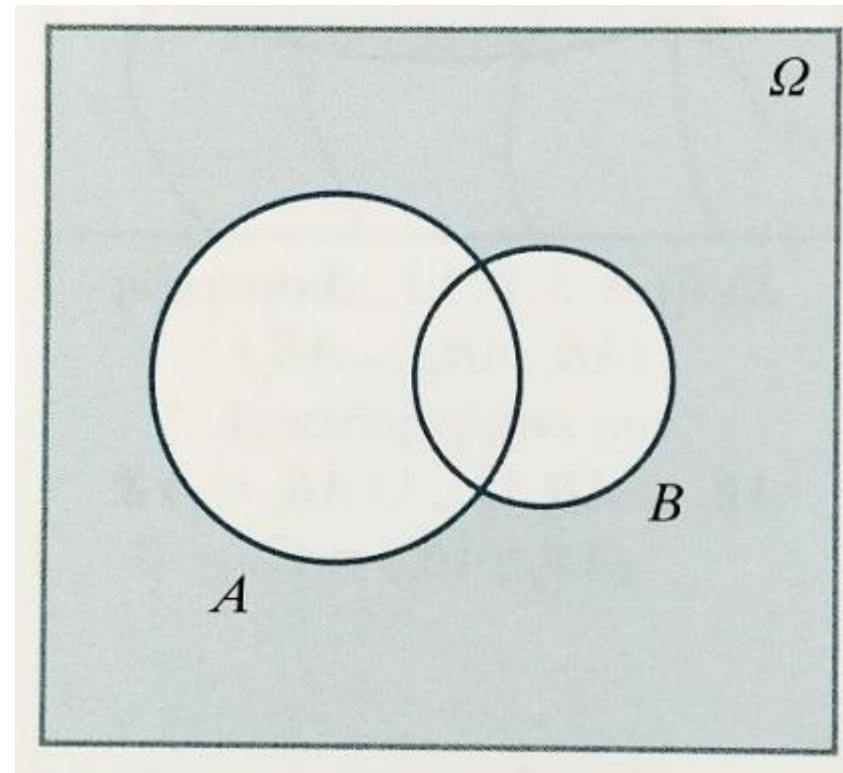
$(A-B) \cup (B-A)$



Συμπλήρωμα ένωσης ενδεχομένων

Το ενδεχόμενο $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})'$ δηλαδή, το συμπλήρωμα της ένωσης δύο ενδεχομένων A, B , πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιηθεί ούτε το A ούτε το B

$$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \mathbf{B}'$$



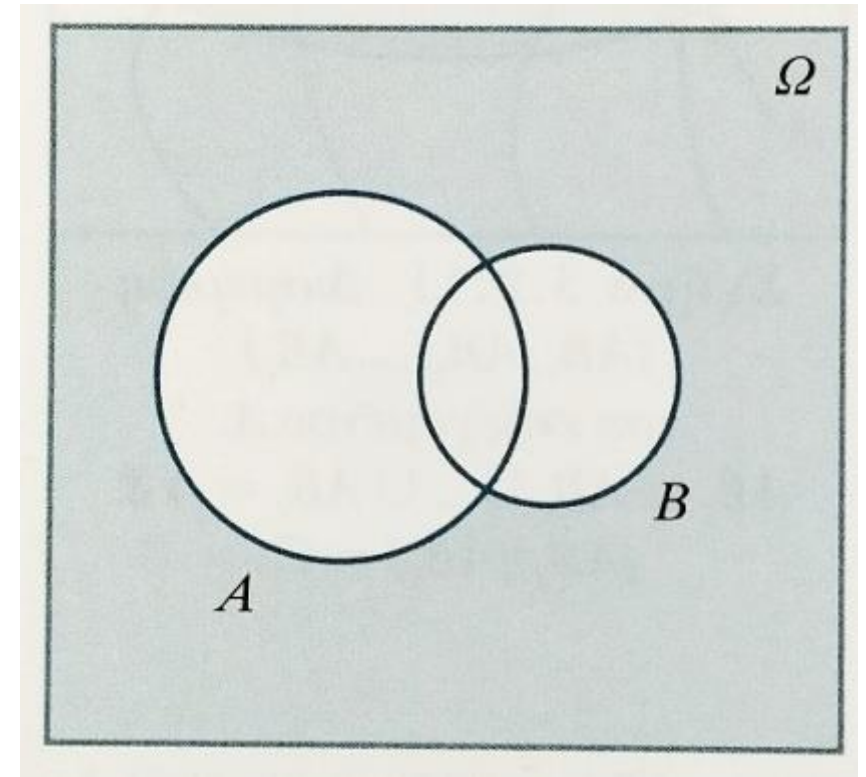
Συμπλήρωμα ένωσης ενδεχομένων

A: Οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο.

B: Οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ.

$(A \cup B)'$: Οι μαθητές που δεν παίζουν ούτε ποδόσφαιρο ούτε μπάσκετ.

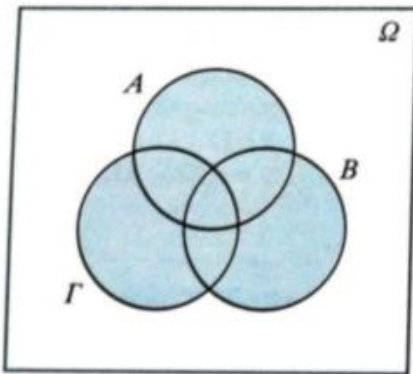
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$



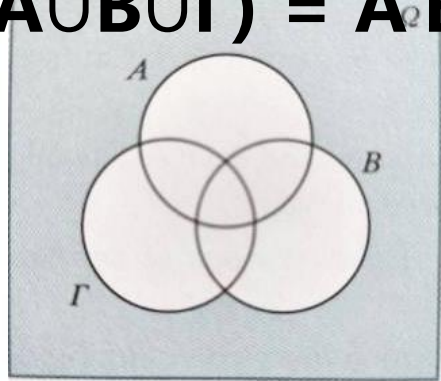
Εφαρμογή 2

Έστω A, B, Γ τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Πώς μπορούν οι σχηματικές αναπαραστάσεις να εκφραστούν με χρήση πράξεων μεταξύ των A, B, Γ ;

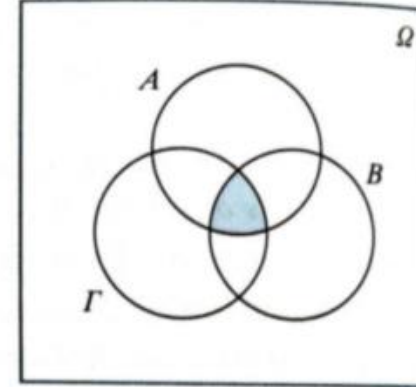
$$A \cup B \cup \Gamma$$



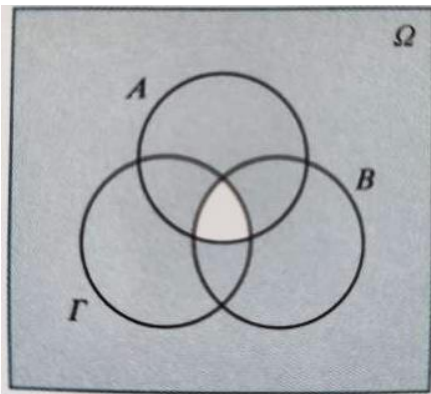
$$(A \cup B \cup \Gamma)' = A' B' \Gamma'$$



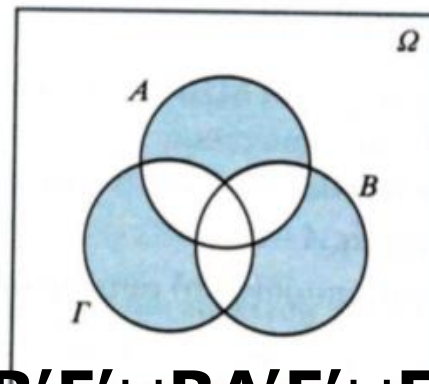
$$A \cap B \cap \Gamma = AB\Gamma$$



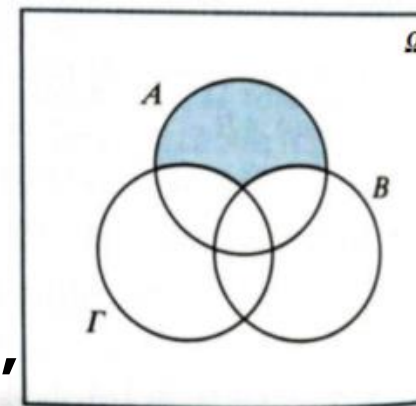
$$(AB\Gamma)'$$



$$AB'\Gamma' \cup BA'\Gamma' \cup \Gamma A'B'$$



$$A(B \cup \Gamma)' = AB'\Gamma'$$



Εφαρμογή 3

Έχουμε 10 κάρτες αριθμημένες από το 1 έως και το 10. Επιλέγουμε τυχαία μια κάρτα και γράφουμε τον αριθμό της.

α) Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του παραπάνω πειράματος τύχης,

β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- A: ο αριθμός της κάρτας είναι περιττός
- B: ο αριθμός της κάρτας είναι ανάμεσα στο 2 και το 9
- Γ: ο αριθμός της κάρτας είναι τουλάχιστον 6

Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

$A \cup B$, $B \cap \Gamma$, Γ' , $\Gamma - B$ $(A \cup B) \cap \Gamma$ $A \cup B'$

Εφαρμογή 4

Ρίχνουμε ένα ζάρι και καταγράφουμε την ένδειξη της πάνω έδρας του. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: ο αριθμός είναι περιττός

B: ο αριθμός είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το 3.

- Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω και τα ενδεχόμενα A και B.
- Να βρείτε τα στοιχεία των ενδεχομένων:
 - i. Πραγματοποιείται το A ή το B
 - ii. Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B
 - iii. Δεν πραγματοποιείται το A
 - iv. Πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B
 - v. Πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B