

Εισαγωγή στη θεωρία Πιθανοτήτων και την Στατιστική

Πιθανότητες – Θεωρία Συνόλων – Ιδιότητες

Εφαρμογή 1

Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα (κεφαλή ή γράμματα).

α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης με χρήση δένδροδιαγράμματος.

β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- A: εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά κεφαλή
- B: εμφανίζονται γράμματα στην 1η ρίψη
- Γ: εμφανίζεται ακριβώς 1 φορά κεφαλή
- Δ: εμφανίζεται η ίδια ένδειξη και τις δύο φορές

i) Να βρείτε τα στοιχεία των ενδεχομένων A, B, Γ και Δ

ii) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Γ και Δ είναι ασυμβίβαστα

iii) Να βρείτε τα ενδεχόμενα : AB , $B \cup \Gamma$, $\Gamma - B$, $A' \cup \Delta'$

Εφαρμογή 2

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα τρεις φορές και σημειώνουμε κάθε φορά την ένδειξη (κεφαλή ή γράμματα).

α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης με χρήση δένδροδιαγράμματος.

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- A: εμφανίστηκε κεφαλή ακριβώς 2 φορές
- B: εμφανίστηκαν γράμματα τουλάχιστον 2 φορές
- Γ: εμφανίστηκε η ίδια ένδειξη και τις 3 φορές

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Σε κάθε ενδεχόμενο A του Ω αποδίδουμε έναν πραγματικό αριθμό που ονομάζουμε πιθανότητα του A και συμβολίζεται με $P(A)$ έτσι, ώστε:

- $P(A) \geq 0$ για οποιοδήποτε A του Ω
- $P(\Omega) = 1$
- ικανοποιείται η ιδιότητα της προσθετικότητας:

Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι οποιαδήποτε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω , τότε ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

***για μη ισοπίθανα ενδεχόμενα**

Εφαρμογή 3

Σε μια σακούλα έχω 10 μπάλες που γράφουν πάνω του αριθμούς από το 1 ως το 4. Στη σακούλα:

- Ο αριθμός «1» υπάρχει 4 φορές
- Ο αριθμός «2» υπάρχει 3 φορές
- Ο αριθμός «3» υπάρχει 2 φορές και
- Ο αριθμός «4» υπάρχει 1 φορά.

Κάθε φορά τραβάμε τυχαία μια μπάλα σημειώνουμε τον αριθμό της και την επιστρέφουμε στη σακούλα.

α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης και να υπολογίσετε την πιθανότητα του κάθε απλού ενδεχομένου.

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- A: ο αριθμός που σημειώσαμε είναι άρτιος,
- B: ο αριθμός που σημειώσαμε είναι διαιρέτης του 30.

Εφαρμογή 4

Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι ο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ισχύει:

$$P(\{1\})=P(\{5\}) = 1/10$$

$$P(\{2\})= 3/10$$

$$P(\{1,3\})= 1/2$$

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(\{3\})$ και $P(\{4\})$

β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A=\{1, 3, 5\}$ και $B= \{2, 4, 5\}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A , $B - A$, $A \cup B$, και $A'B'$

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A) = P(AB) + P(A-B)$
- Αν $B \subseteq A$ τότε $P(B) \leq P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

- $A' \cup B' = (AB)'$
- $A'B' = (A \cup B)'$
- $AB' = A - B$

A και B είναι οποιαδήποτε μη ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">• $P(A') = 1 - P(A)$• $P(A) = P(AB) + P(A - B)$• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ | <ul style="list-style-type: none">• $A' \cup B' = (AB)'$• $A'B' = (A \cup B)'$• $AB' = A - B$ |
|---|--|

Εφαρμογή 5

Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν:

$$P(A - B) = 1/3 \quad P(A') = 1/6 \quad P(B) = 3/4$$

Να υπολογίσετε:

$$P(A)$$

$$P(AB)$$

$$P(B - A)$$

Εφαρμογή 6

Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν:

$$P(A) = 2/5 \quad P(B) = 1/2 \quad P(AB) = 3/10$$

Να υπολογίσετε:

$$P(A \cup B)$$

$$P(A'B')$$

$$P(A' \cup B')$$