

Εισαγωγή στη θεωρία Πιθανοτήτων και την Στατιστική

Οργάνωση & Παρουσίαση Δεδομένων

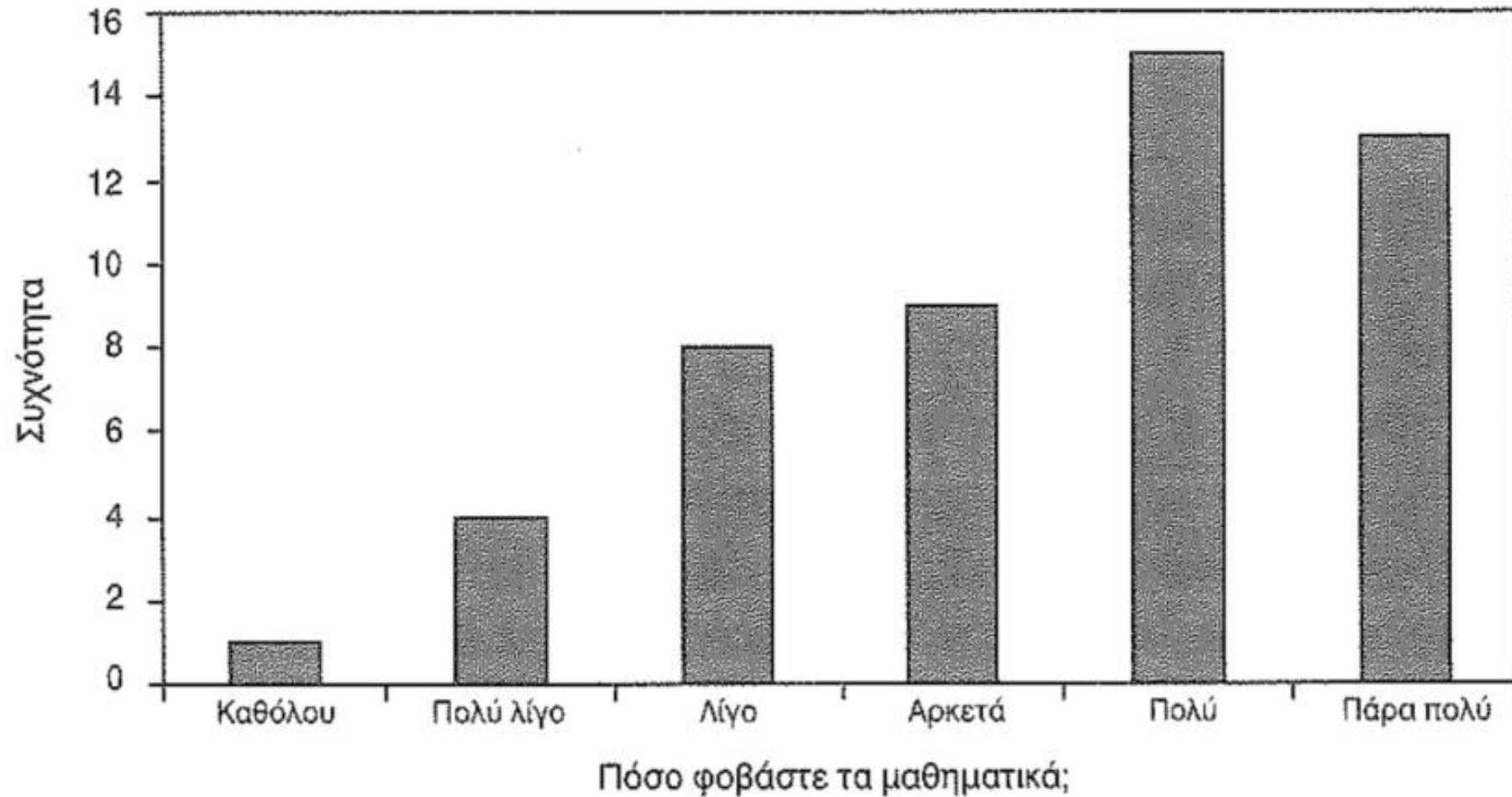
Γραφική Αναπαράσταση ποιοτικών & ποσοτικών διακριτών μεταβλητών

- Ραβδόγραμμα συχνοτήτων
- Ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων
- Κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων
- Σημειόγραμμα

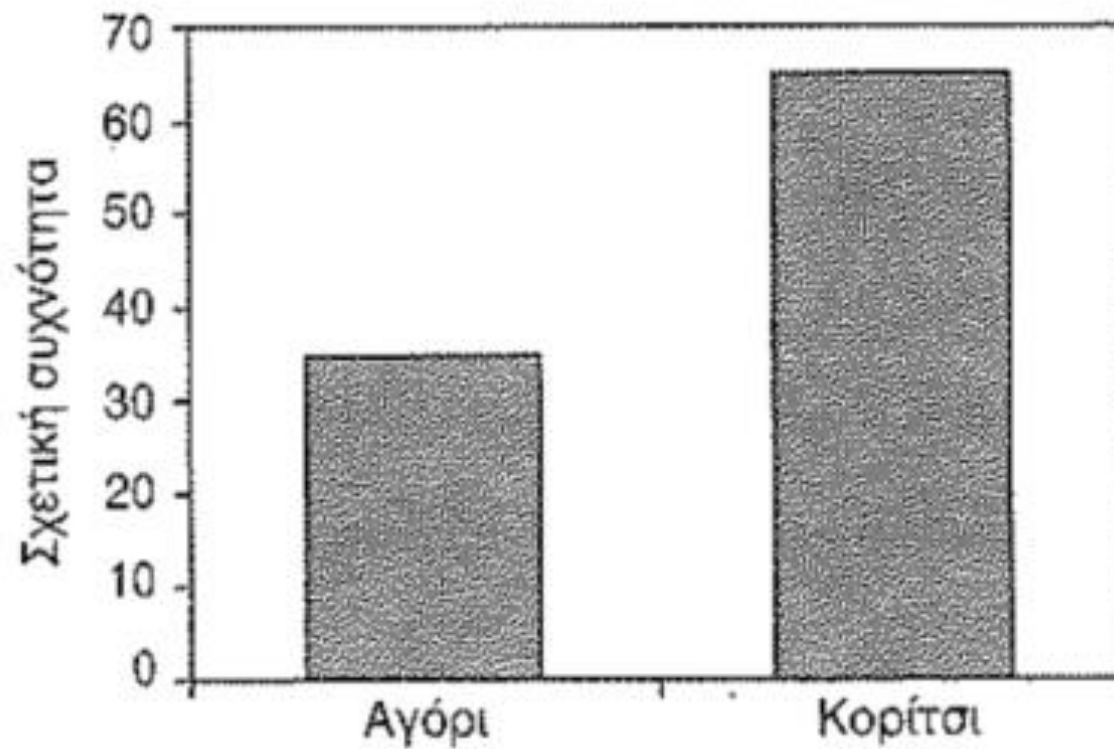
Ραβδόγραμμα

- Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας **ποιοτικής μεταβλητής** ή μιας **ποσοτικής διακριτής μεταβλητής**
- Είναι μια απεικόνιση σε 2 άξονες:
 - Στον οριζόντιο άξονα (συνήθως) τοποθετούμε, σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις, τις κατηγορίες της μεταβλητής
 - Κατά μήκος του άλλου άξονα κατασκευάζουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα, το ύψος των οποίων είναι ανάλογο της συχνότητας (**απόλυτης** ή **σχετικής**) της κάθε κατηγορίας
- Έτσι προκύπτει το **ραβδόγραμμα συχνοτήτων** ή **σχετικών συχνοτήτων**

Ραβδόγραμμα συχνότητας



Ραβδόγραμμα σχετικής συχνότητας



Εφαρμογή 1

- Ρωτήσαμε τους 40 υπαλλήλους μιας επιχείρησης με ποιον τρόπο πηγαίνουν στη δουλειά τους κάθε πρωί και οι απαντήσεις που πήραμε φαίνονται στον πίνακα. Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων για τα δεδομένα.

Μεταφορικό Μέσο	Αριθμός υπαλλήλων
Ταξί	4
ΜΜΜ	16
Αυτοκίνητο	12
Μηχανή	8
Σύνολο	40

Εφαρμογή 2

- Ρωτήσαμε 40 οικογένειες για τον αριθμό αυτοκινήτων που διαθέτουν. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα συχνοτήτων. *Οι οικογένειες που έχουν 2 αυτοκίνητα είναι τριπλάσιες από τις οικογένειες που έχουν 3 αυτοκίνητα.*

- Να συμπληρώσετε τον πίνακα
- Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων

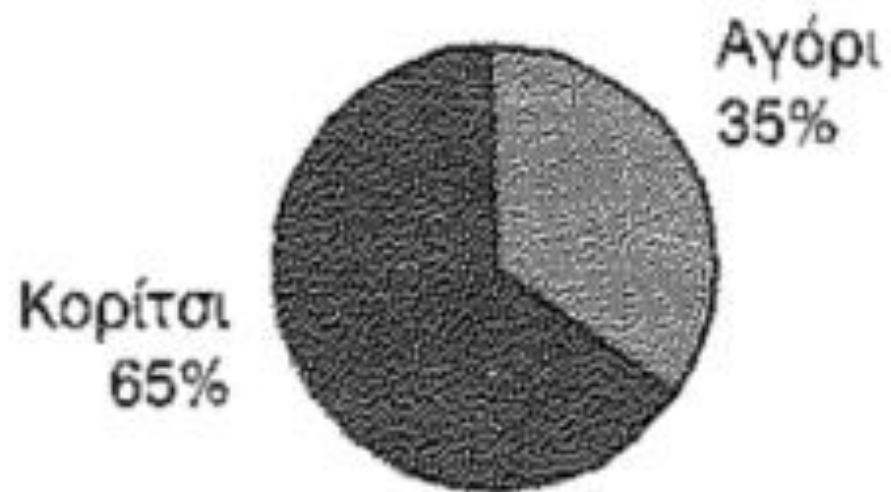
Αριθμός αυτοκινήτων	Αριθμός οικογενειών
0	8
1	16
2	
3	
Σύνολο	40

Κυκλικό διάγραμμα (πίτα)

- Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας **ποιοτικής μεταβλητής** ή μιας **ποσοτικής διακριτής μεταβλητής**
- Οι κατηγορίες της ποιοτικής μεταβλητής παριστάνονται με τομείς ενός κύκλου, οι οποίοι έχουν εμβαδόν ανάλογο της συχνότητας της κάθε κατηγορίας.
- Όλος ο κύκλος (το 100%) έχει 360° , άρα αν πολλαπλασιάσουμε τη σχετική εκατοστιαία συχνότητα με το $3,6^\circ$ βρίσκουμε τη γωνία που ο κάθε κυκλικός τομέας πρέπει να σχηματίζει.

$$\alpha = 360^\circ \times f = 3,6^\circ \times f\%$$

Κυκλικό διάγραμμα (πίτα)

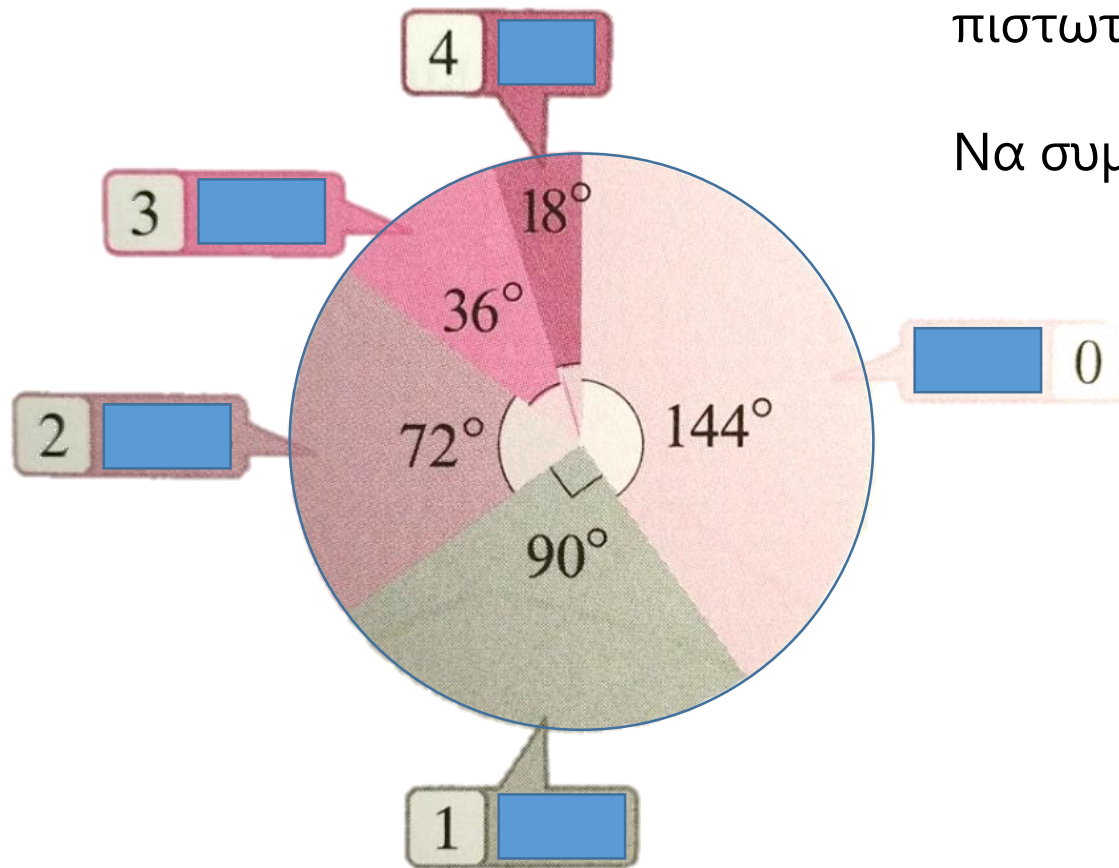


$$\alpha = 360^\circ \times f = 3,6^\circ \times f\%$$

Εφαρμογή 3

Το κυκλικό διάγραμμα αναπαριστά τον αριθμό των πιστωτικών καρτών που έχουν στην κατοχή τους 60 άτομα.

Να συμπληρώσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.



$$\alpha = 360^\circ \times f = 3,6^\circ \times f\%$$

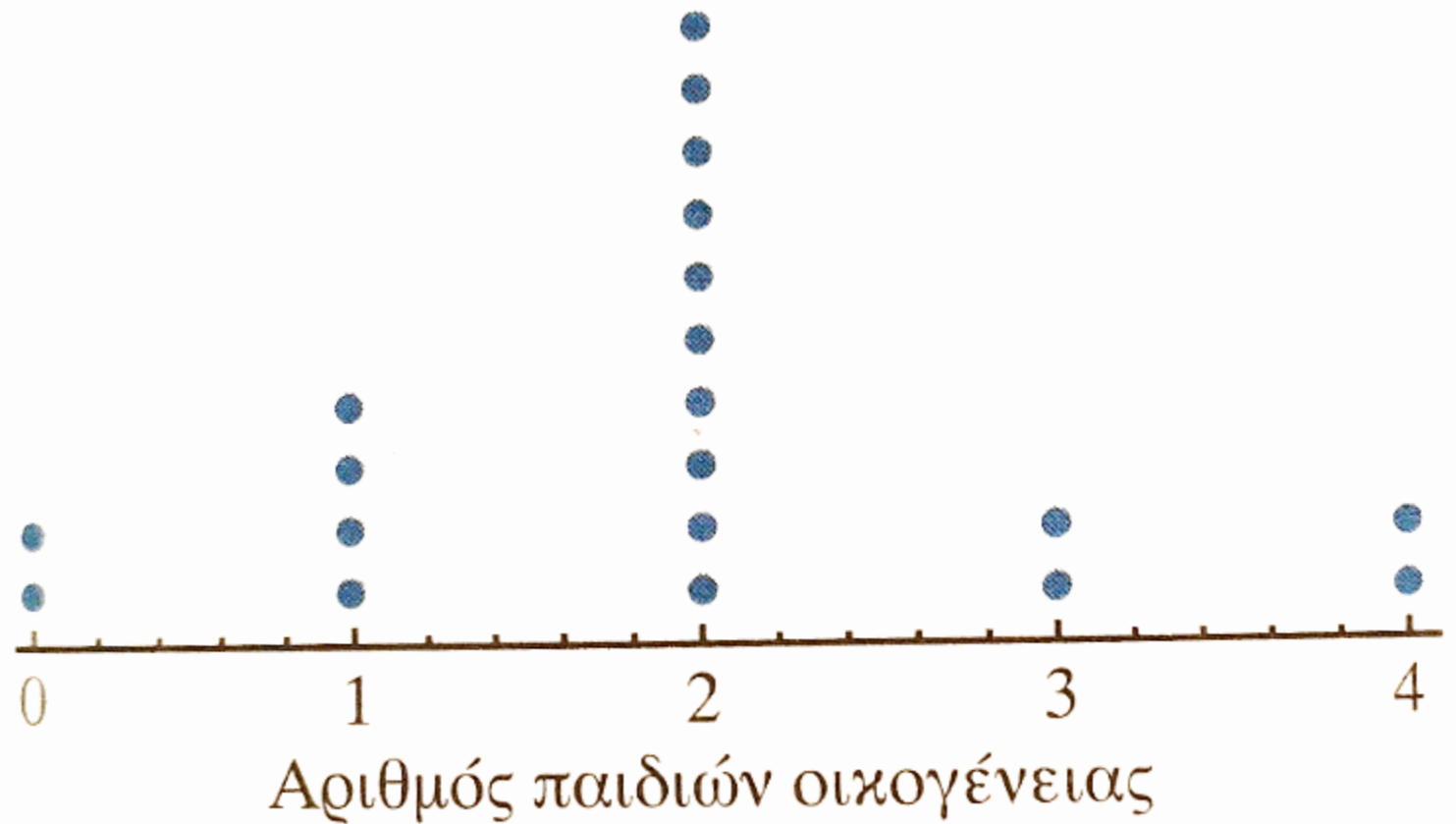
Αριθμός Πιστωτικών Καρτών	Αριθμός ατόμων f%	Αριθμός ατόμων ν
0		
1		
2		
3		
4		
Σύνολο		60

Σημειόγραμμα

- Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας **ποιοτικής μεταβλητής** ή μιας **ποσοτικής διακριτής μεταβλητής**.
- Χρησιμοποιείται όταν έχουμε **λίγες παρατηρήσεις**
- Για να κατασκευάσουμε ένα σημειόγραμμα τοποθετούμε τις τιμές της μεταβλητής στον οριζόντιο άξονα και πάνω από κάθε τιμή βάζουμε κατακόρυφα τόσες τελείες όσες και η αντίστοιχη συχνότητα.

Σημειόγραμμα

Αριθμός παιδιών	Αριθμός οικογενειών n
0	2
1	4
2	10
3	2
4	2

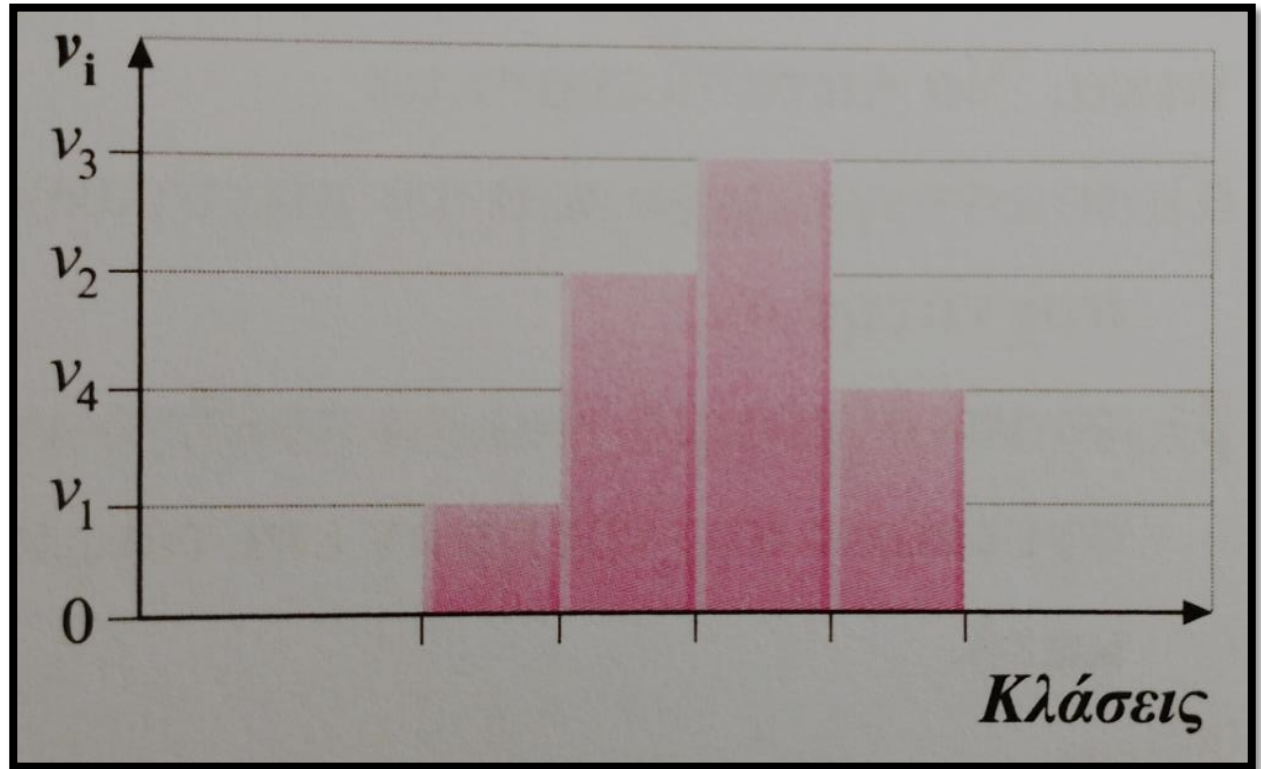


Γραφική Αναπαράσταση ομαδοποιημένων δεδομένων

- Ιστόγραμμα (απόλυτων/ σχετικών/ αθροιστικών) συχνοτήτων
- Πολύγωνο (απόλυτων/ σχετικών/ αθροιστικών) συχνοτήτων

Ιστόγραμμα συχνοτήτων

- Κατάλληλο για γραφική παράσταση πίνακα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων

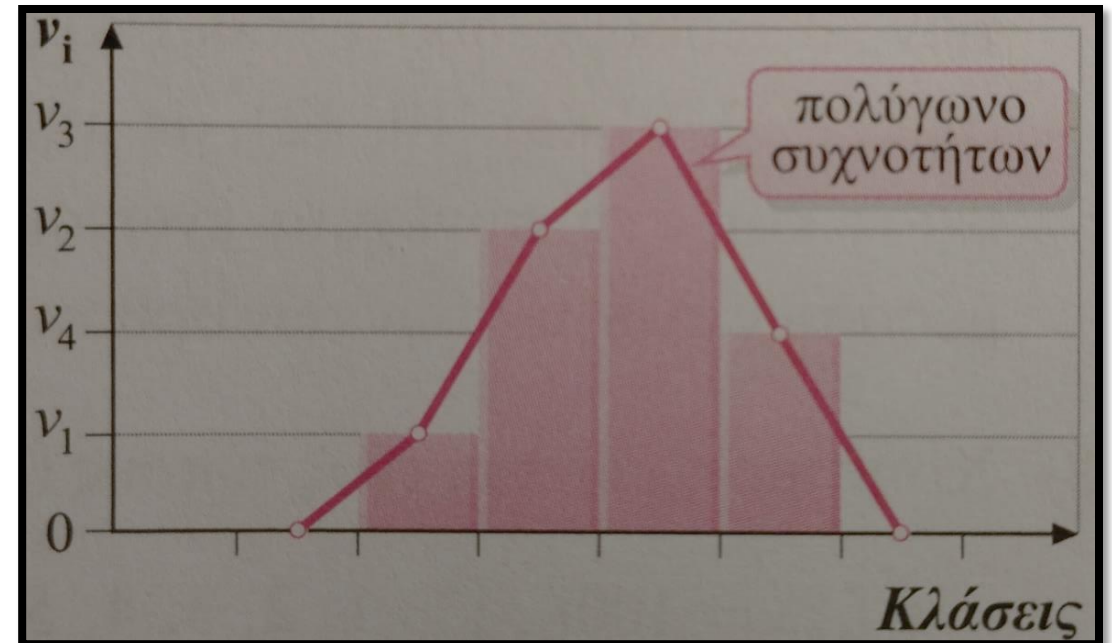


Κατασκευή ιστογράμματος συχνοτήτων

- Στο οριζόντιο άξονα σημειώνουμε τα όρια των κλάσεων
- Οι τιμές της μεταβλητής τοποθετούνται πάντα σε αύξουσα σειρά, από αριστερά προς τα δεξιά
- Κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς) που καθένα έχει βάση το πλάτος της κλάσης & ύψος ίσο με τη συχνότητα (**απόλυτη ή σχετική**) της κλάσης αυτής
- Έτσι προκύπτει το **ιστόγραμμα συχνοτήτων** ή **σχετικών συχνοτήτων**
- Σε συνεχείς μεταβλητές δεν αφήνουμε κενά μεταξύ των ιστών.

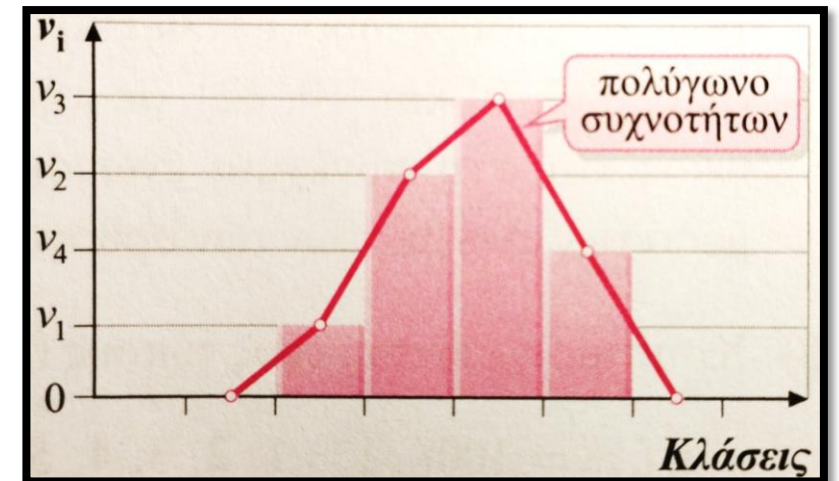
Πολύγωνο συχνοτήτων

- Το πολύγωνο συχνοτήτων είναι μια πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα μέσα των πάνω πλευρών των ορθογωνίων.
- Η συχνότητα κάθε τιμής φαίνεται από το ύψος της γραμμής, η οποία μαζί με τον οριζόντιο άξονα σχηματίζει ένα κλειστό πολύγωνο.



Κατασκευή πολυγώνου συχνοτήτων

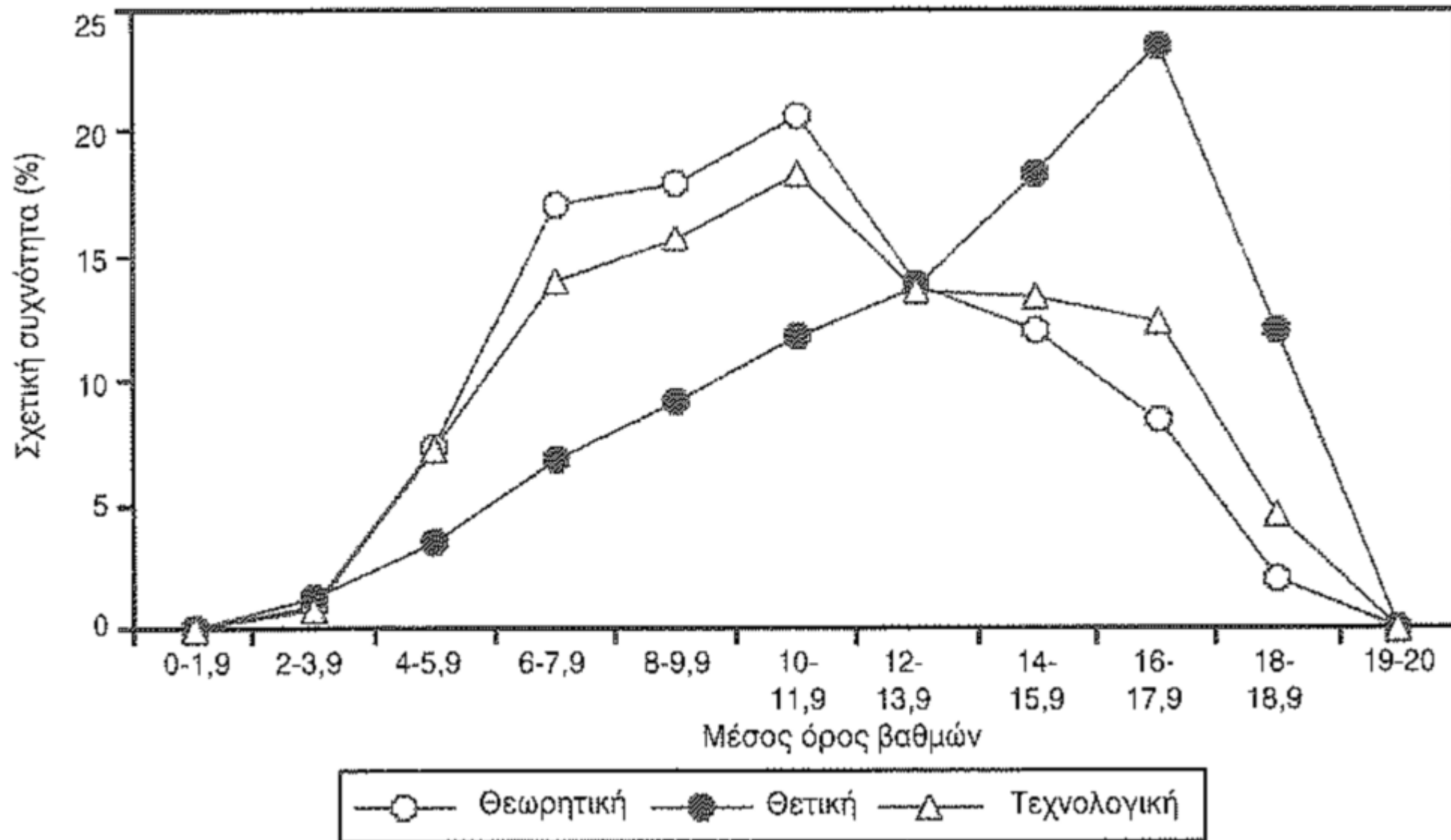
- Τοποθετούμε στον οριζόντιο άξονα τις τιμές των ορίων των κλάσεων
- Στην αρχή και το τέλος του ιστογράμματος θεωρούμε δύο υποθετικές κλάσεις με συχνότητα μηδέν.
- Ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων.



Πολύγωνο συχνοτήτων

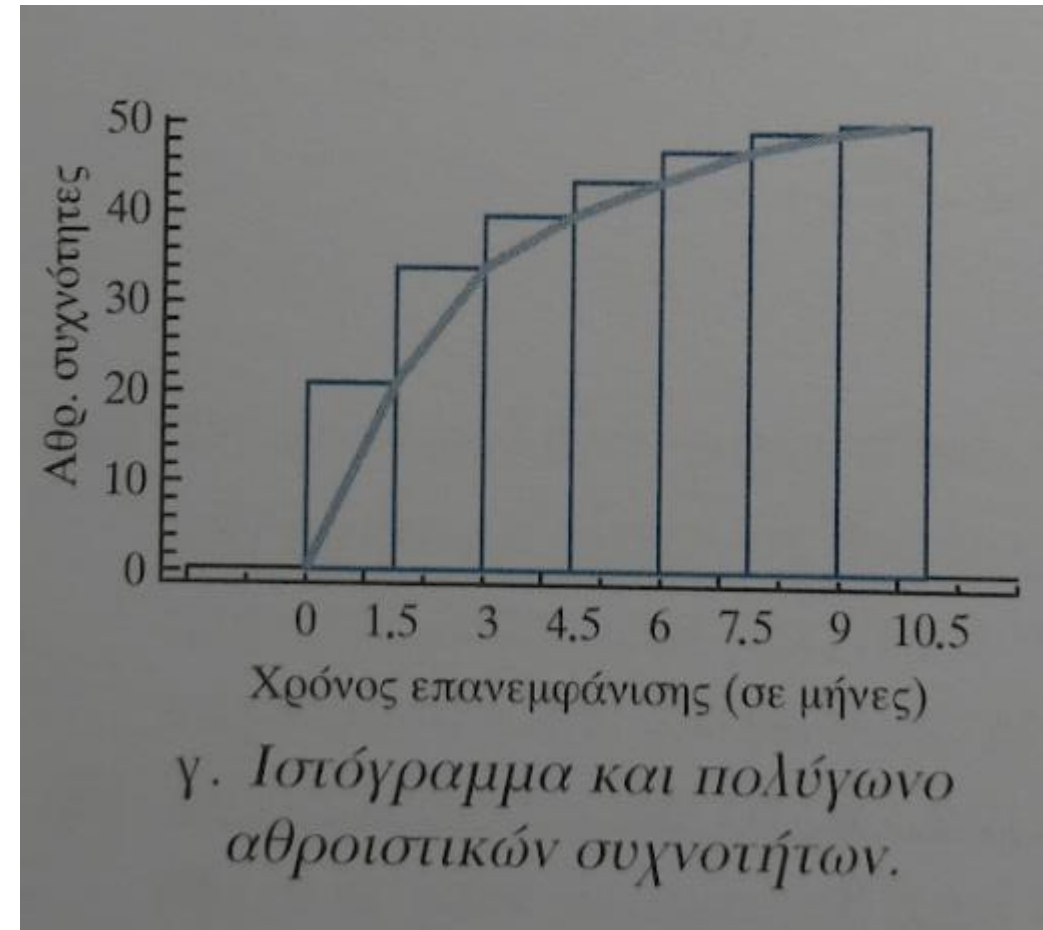
- Το πλεονέκτημα του πολύγωνου συχνοτήτων έναντι του ιστογράμματος έγκειται στη δυνατότητα που μας δίνει να παραστήσουμε στο ίδιο διάγραμμα τις συχνότητες διαφορετικών ομάδων.
- Έτσι μπορούμε να συγκρίνουμε την κατανομή του χαρακτηριστικού στις ομάδες αυτές.

Πολύγωνο συχνοτήτων



Ιστόγραμμα & Πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

- Αν στον κατακόρυφο άξονα του ιστογράμματος συχνοτήτων, αντί για τις επιμέρους συχνότητες βάλουμε τις αθροιστικές, τότε προκύπτει το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.
- Για να κατασκευάσουμε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα τα δεξιά άκρα των πάνω βάσεων των ορθογωνίων.
- Το πολύγωνο αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, όταν θέλουμε να παρουσιάσουμε την εξέλιξη κάποιου φαινομένου.



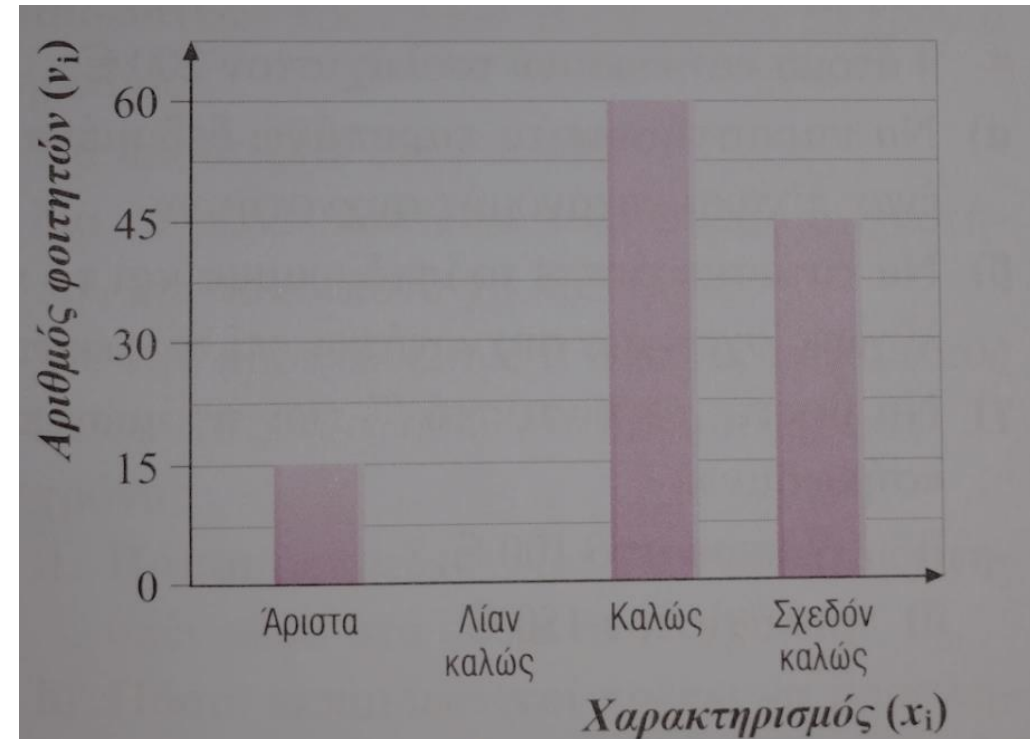
Εφαρμογή 4

- Οι μέγιστες θερμοκρασίες 60 ημερών που καταγράφηκαν σε έναν μετεωρολογικό σταθμό φαίνονται στον πίνακα. Να κατασκευαστεί:
 1. Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων
 2. Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών εκατοστιαίων συχνοτήτων

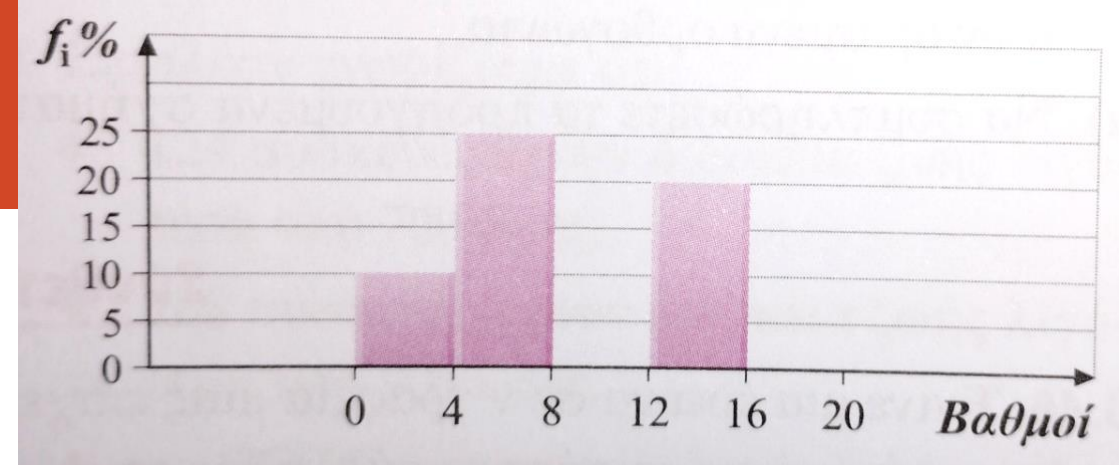
Μέγιστη θερμοκρασία (C)	Αριθμός ημερών
[0 – 2)	6
[2 – 4)	15
[4 – 6)	21
[6 – 8)	12
[8 – 10)	6
Σύνολο	60

Εφαρμογή 5

- Στο ραβδόγραμμα φαίνονται οι χαρακτηρισμοί πτυχίου 150 αποφοίτων.
- Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής σχετικών συχνοτήτων και σχετικών εκατοστιαίων συχνοτήτων
- Να βρείτε το ποσοστό των φοιτητών που πήραν πτυχίο με Άριστα ή Λίαν καλώς
- Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα
(→ Να βρείτε τη γωνία κάθε κυκλικού τομέα)



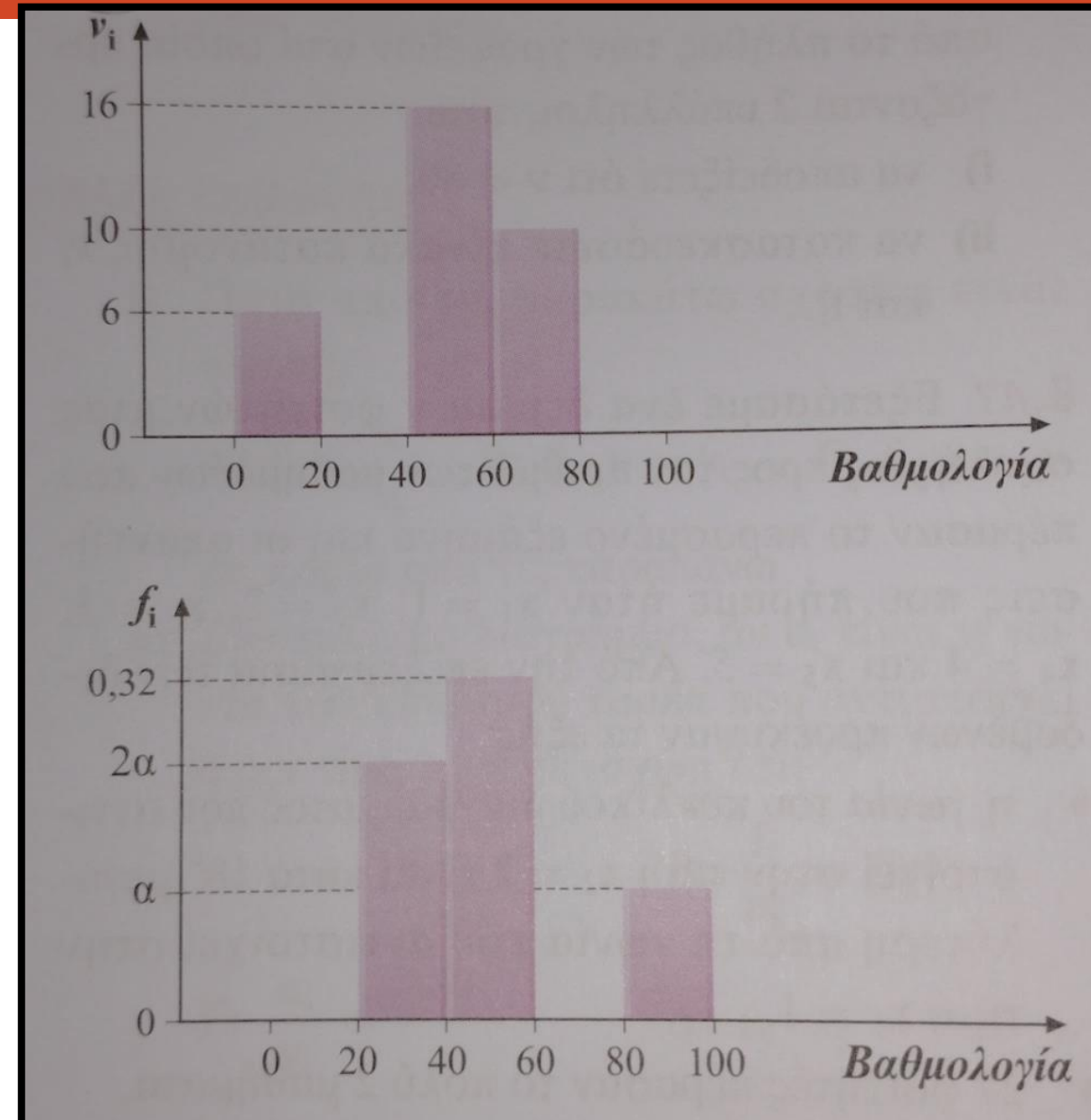
Εφαρμογή 6



- Οι βαθμοί των μαθητών σε ένα διαγώνισμα φαίνονται στο ιστόγραμμα σχετικών εκατοστιαίων συχνοτήτων. Η σχετική εκατοστιαία συχνότητα της 3^{ης} κλάσης είναι διπλάσια της 5^{ης} κλάσης.
- Να συμπληρωθεί το ιστόγραμμα & να δημιουργηθεί το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων
- Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν < 8
- Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν ≥ 16
- Αν οι μαθητές που έγραψαν το πολύ 12 είναι 26, να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων

Εφαρμογή 7

- Οι βαθμοί των μαθητών σε ένα διαγώνισμα φαίνονται στα ιστογράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
- Να συμπληρωθούν τα ιστογράμματα & να δημιουργηθούν τα πολύγωνα συχνοτήτων
- Να φτιάξετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων
- Αν στο διάστημα $[50 - 60)$ ανήκουν οι βαθμοί 8 μαθητών να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν κάτω από τη βάση



Μορφολογία κατανομών

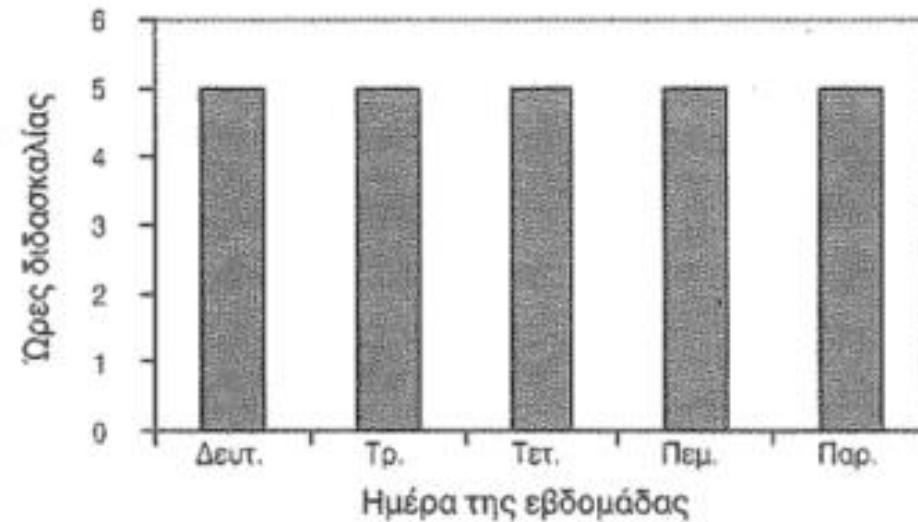
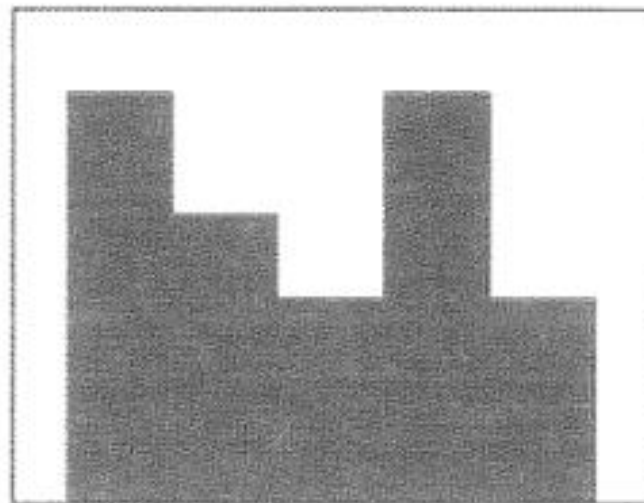
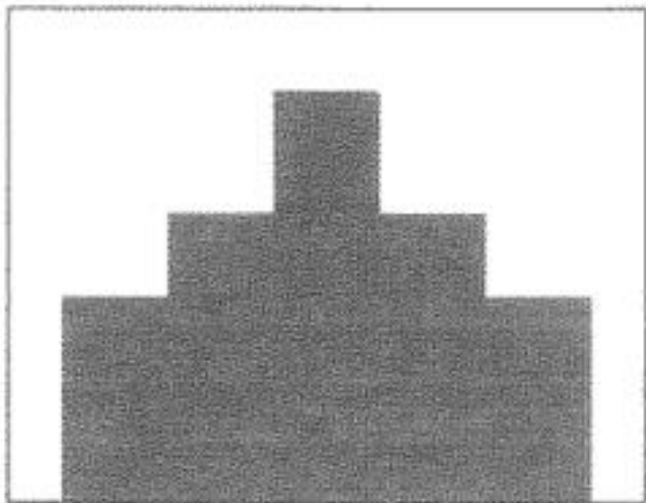
- Το ραβδόγραμμα, το ιστόγραμμα ή το πολύγωνο συχνοτήτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δείξουν την **κατανομή της συχνότητας**, δηλαδή πώς οι συχνότητες καταμερίζονται στις τιμές μιας μεταβλητής



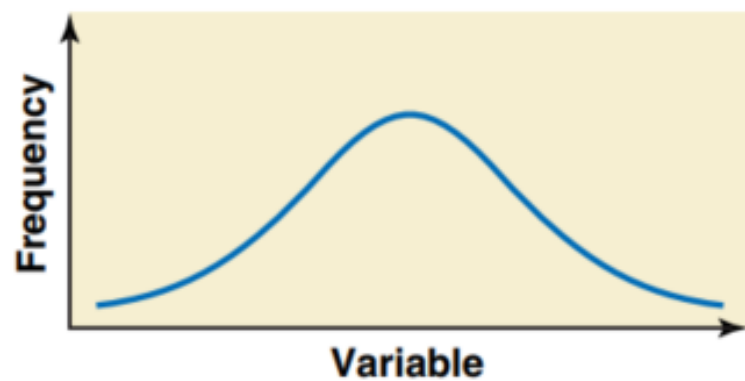
Κορυφές

- Όταν τα ραβδογράμματα ή τα ιστογράμματα έχουν μία μόνο κορυφή, οι κατανομές λέγονται **μονοκόρυφες**.
- Η κορυφή στο ιστόγραμμα παρατηρείται πάνω από την τιμή που εμφανίζεται συχνότερα στο δείγμα, εκείνη που επικρατεί στο δείγμα, γι' αυτό ονομάζεται **επικρατούσα ή δεσπόζουσα τιμή**.
- Όταν μια κατανομή έχει δύο ή και περισσότερες κορυφές, και τότε λέγεται **δικόρυφη ή πολυκόρυφη κατανομή**.
- Όταν δεν έχει καμία κορυφή, οπότε όλες οι τιμές της έχουν τις ίδιες (ή σχεδόν τις ίδιες) συχνότητες τότε λέγεται **ομοιόμορφη ή ισοϋψής κατανομή**.

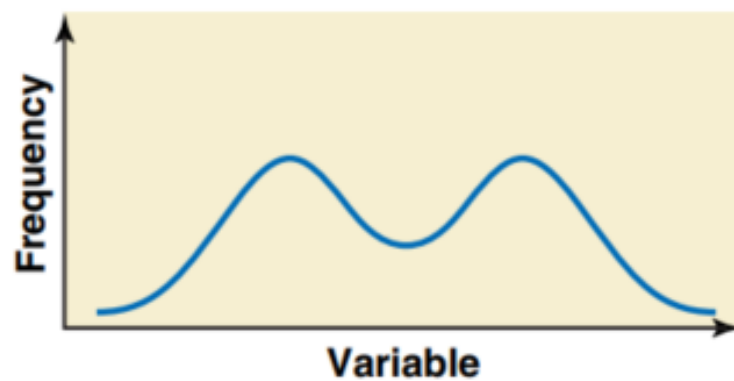
Κορυφές



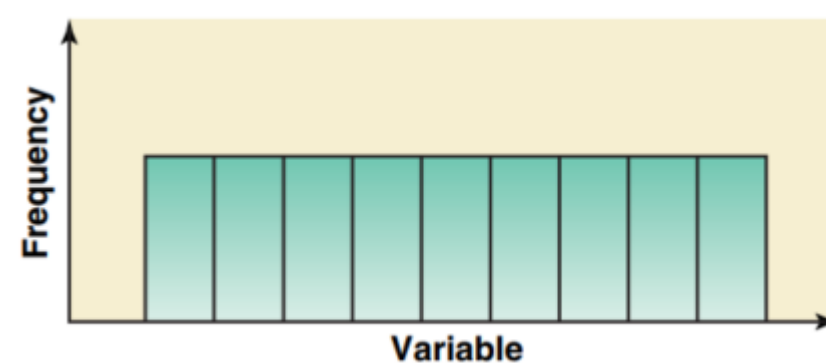
Μονοκόρυφη



Δικόρυφη



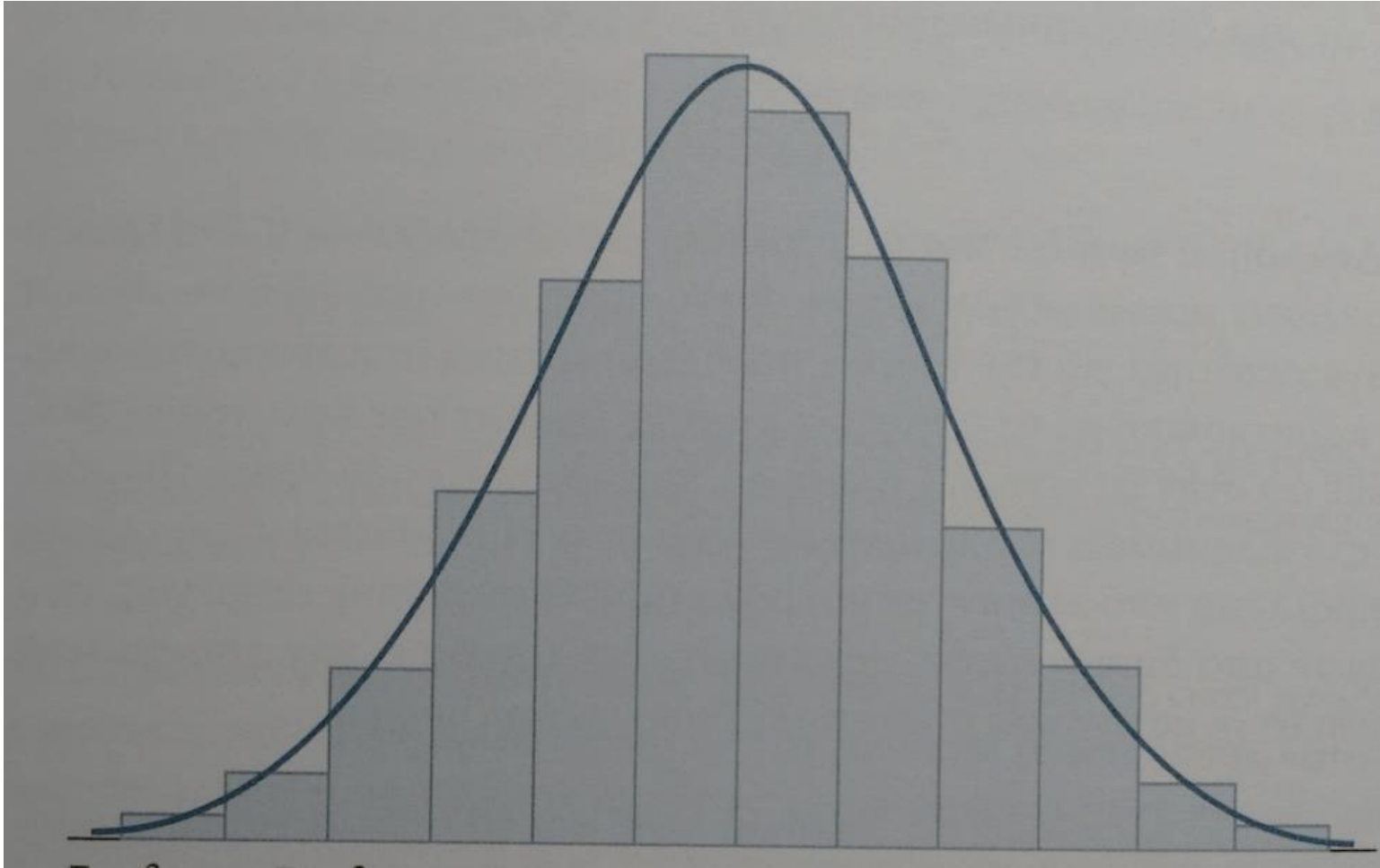
Ισοϋψής



Συμμετρία

- Όταν το αριστερό μισό ενός ιστογράμματος ή ραβδογράμματος αποτελεί (σχεδόν) κατοπτρικό είδωλο του δεξιού μισού, δηλαδή όταν οι συχνότητες εκατέρωθεν μιας ενδιάμεσης τιμής στην κλίμακα μέτρησης είναι (περίπου) ίσες τότε η κατανομή λέγεται **συμμετρική**
- Το γνωστότερο παράδειγμα συμμετρικής κατανομής είναι η **κανονική**.
- Στην κανονική κατανομή οι συχνότητες συσσωρεύονται στη μέση της κλίμακας και μειώνονται σταδιακά, όσο απομακρυνόμαστε από αυτήν.
- Είναι μια μονοκόρυφη κατανομή, της οποίας το ιστόγραμμα μοιάζει με καμπάνα

Συμμετρία

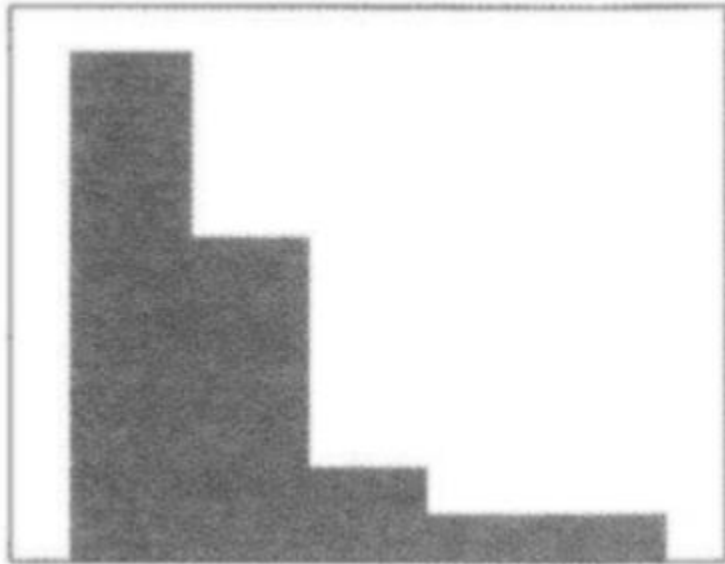


Κανονική κατανομή

Συμμετρία

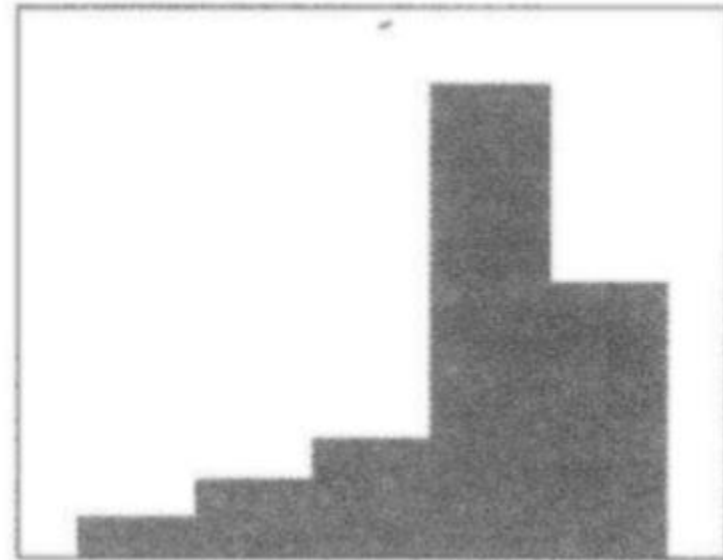
- Αν μια κατανομή είναι μη συμμετρική, λέγεται **λοξή ή ασύμμετρη**.
- Όταν οι υψηλές συχνότητες τείνουν να εμφανίζονται στις μεγάλες τιμές της κλίμακας και οι χαμηλές στις μικρές τιμές η κατανομή ονομάζεται **λοξή αριστερά ή αρνητικά λοξή**.
- Όταν οι υψηλές συχνότητες εμφανίζονται στις χαμηλές βαθμολογίες και ένα μικρό ποσοστό στους υψηλούς βαθμούς η κατανομή λέγεται **λοξή δεξιά ή θετικά λοξή**.
- Ο χαρακτηρισμός της λοξότητας έχει να κάνει με την κατεύθυνση των **λίγων** παρατηρήσεων που βρίσκονται μακριά από τον κύριο όγκο των δεδομένων

Συμμετρία



Λοξή δεξιά

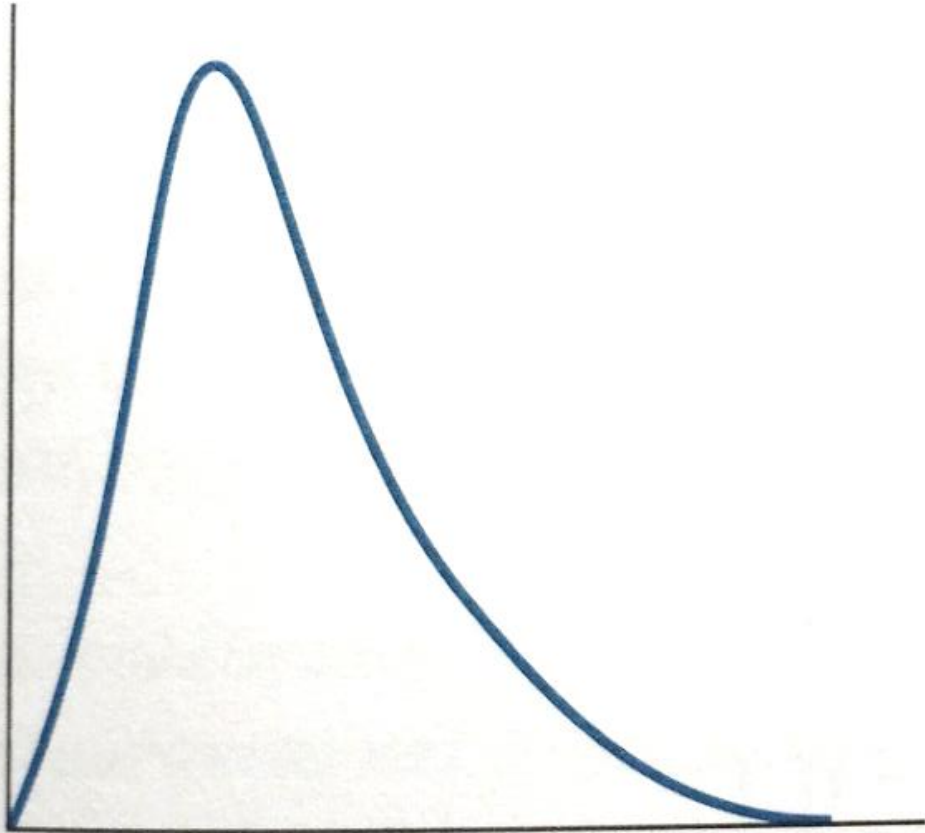
Θετικά λοξή



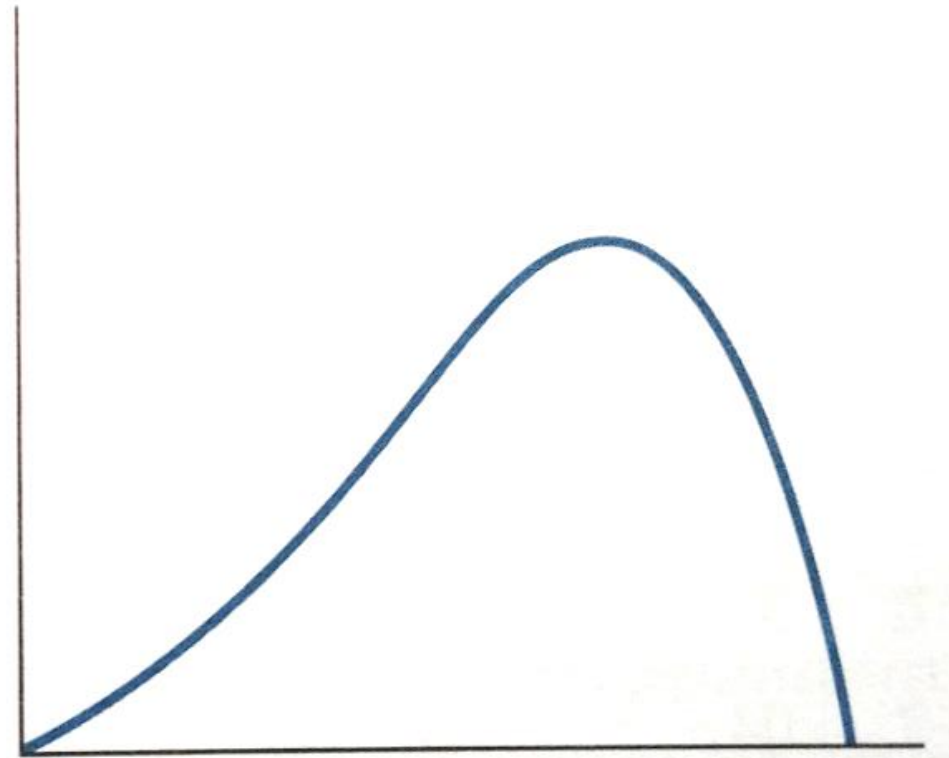
Λοξή αριστερά

Αρνητικά λοξή

Συμμετρία



α. Θετική ασυμμετρία.

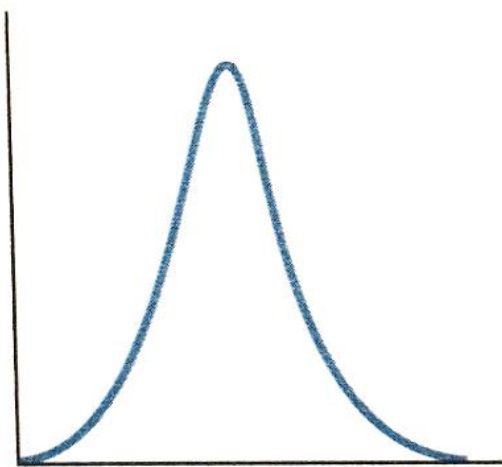
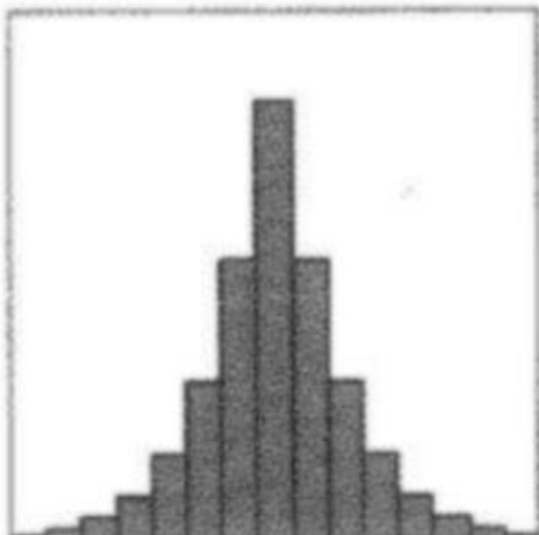


β. Αρνητική ασυμμετρία.

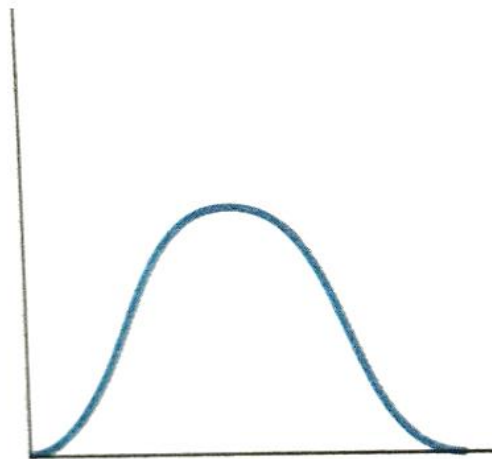
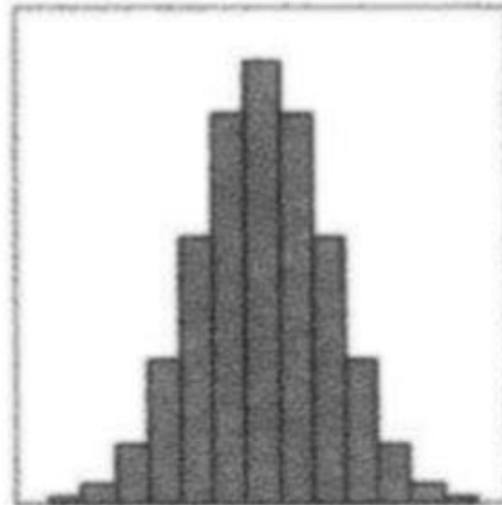
Κυρτότητα

- Η κυρτότητα έχει να κάνει με τον βαθμό διαφοροποίησης της κατανομής σε σχέση με την κανονική, ως προς τον **ρυθμό μεταβολής των συχνοτήτων** και την «αιχμηρότητα» της κορυφής.
- Αν ο ρυθμός είναι πιο «απότομος», οι άκρες της κατανομής είναι πιο «υψηλές» από αυτές της κανονικής και η κορυφή της πιο λεπτή, γι' αυτό η κατανομή λέγεται **λεπτόκυρτη**.
- Αν ο ρυθμός μεταβολής των συχνοτήτων είναι πιο αργός, οι ουρές είναι πιο λεπτές και η κορυφή πιο πλατιά από ό,τι στην κανονική κατανομή, και τότε η κατανομή χαρακτηρίζεται **πλατύκυρτη**.
- Ακραίο παράδειγμα πλατύκυρτης κατανομής αποτελεί η ομοιόμορφη ή ισοϋψής η οποία δεν έχει καθόλου άκρες.

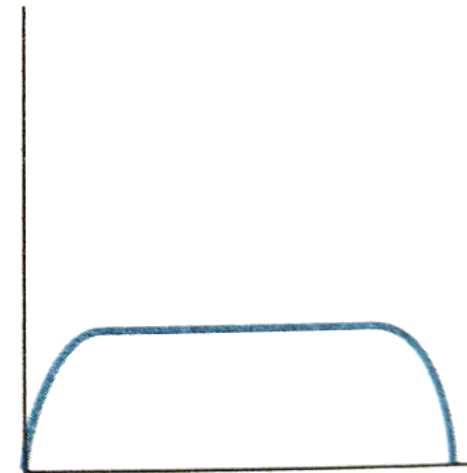
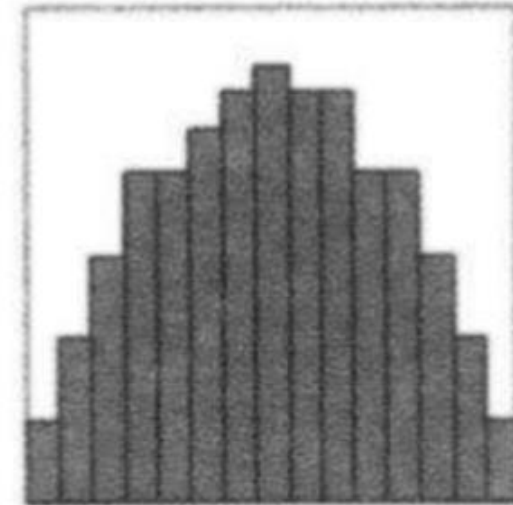
Κυρτότητα



β. Λεπτόκυρτη.



α. Μεσόκυρτη.



γ. Πλατύκυρτη.

Εφαρμογή 8

- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων την κατανομής του δείγματος
- Τι συμπεραίνετε για τη μορφή της; (κορυφές, συμμετρία, κυρτότητα)

Ύψος βροχόπτωσης (σε cm)	Αριθμός σταθμών
[20, 30)	11
[30, 40)	14
[40, 50)	31
[50, 60)	48
[60, 70)	41
[70, 80)	30
[80, 90)	15
[90, 100)	10

Εφαρμογή 8

- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων την κατανομής του δείγματος
- Να χαρακτηρίσετε την κατανομή ως προς τη μορφή της

(κορυφές, συμμετρία, κυρτότητα)

Ύψος βροχόπτωσης (σε cm)	Αριθμός σταθμών
[20, 30)	11
[30, 40)	14
[40, 50)	31
[50, 60)	48
[60, 70)	41
[70, 80)	30
[80, 90)	15
[90, 100)	10