

Εισαγωγή στη θεωρία Πιθανοτήτων και την Στατιστική

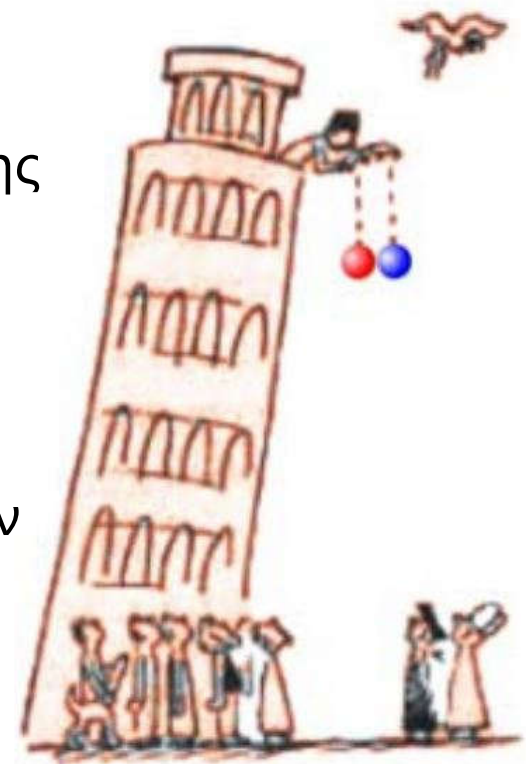
Πιθανότητες - Συνδυαστική

Αιτιοκρατικά πειράματα

Κάθε πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα του, ονομάζεται **αιτιοκρατικό πείραμα**.

Πχ. η ελεύθερη πτώση ενός αντικειμένου υπό την επίδραση της βαρύτητας, χωρίς αντίσταση αέρα.

Όταν γνωρίζουμε την αρχική θέση και ταχύτητα του αντικειμένου, καθώς και την επιτάχυνση λόγω βαρύτητας (9.8 m/s^2), μπορούμε να προβλέψουμε πλήρως τη θέση και την ταχύτητα του αντικειμένου οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

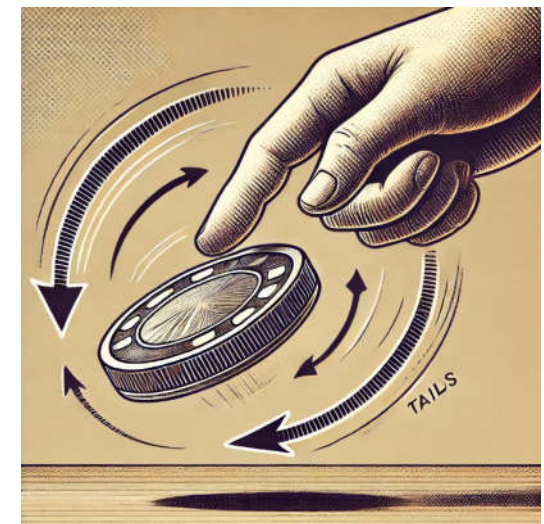


Πειράματα τύχης

Κάθε πείραμα του οποίου δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα εκ των προτέρων, παρόλο που επαναλαμβάνεται κάτω από τις ίδιες συνθήκες, ονομάζεται **πείραμα τύχης**

Πχ. η ρίψη ενός νομίσματος.

Παρόλο που γνωρίζουμε τις συνθήκες (το σχήμα και τη μάζα του νομίσματος, τη δύναμη και την κατεύθυνση με την οποία ρίχνεται), δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα αν θα πέσει κορώνα ή γράμματα. Το αποτέλεσμα εξαρτάται από παράγοντες που δεν ελέγχονται πλήρως, όπως οι μικρές μεταβολές στην κίνηση και την επιφάνεια πρόσκρουσης.



Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος** .

Οποιοδήποτε σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **ενδεχόμενο** ή **γεγονός**

Δεντροδιάγραμμα

Όταν ένα πείραμα τύχης συντελείται σε τουλάχιστον δύο εκτελέσεις (φάσεις), τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τον δειγματικό χώρο με τη βοήθεια ενός δεντροδιαγράμματος, το οποίο κατασκευάζεται ως εξής:

- Θεωρούμε ένα σημείο ως αρχή του πειράματος.
- Βρίσκουμε τα δυνατά αποτελέσματα της 1ης φάσης, τα γράφουμε κατακόρυφα και με ευθύγραμμα τμήματα (κλάδους) ενώνουμε την αρχή με καθένα από αυτά.
- Για κάθε αποτέλεσμα της 1ης φάσης γράφουμε τα δυνατά αποτελέσματα της 2ης φάσης, σχεδιάζουμε τους αντίστοιχους κλάδους κ.ο.κ.

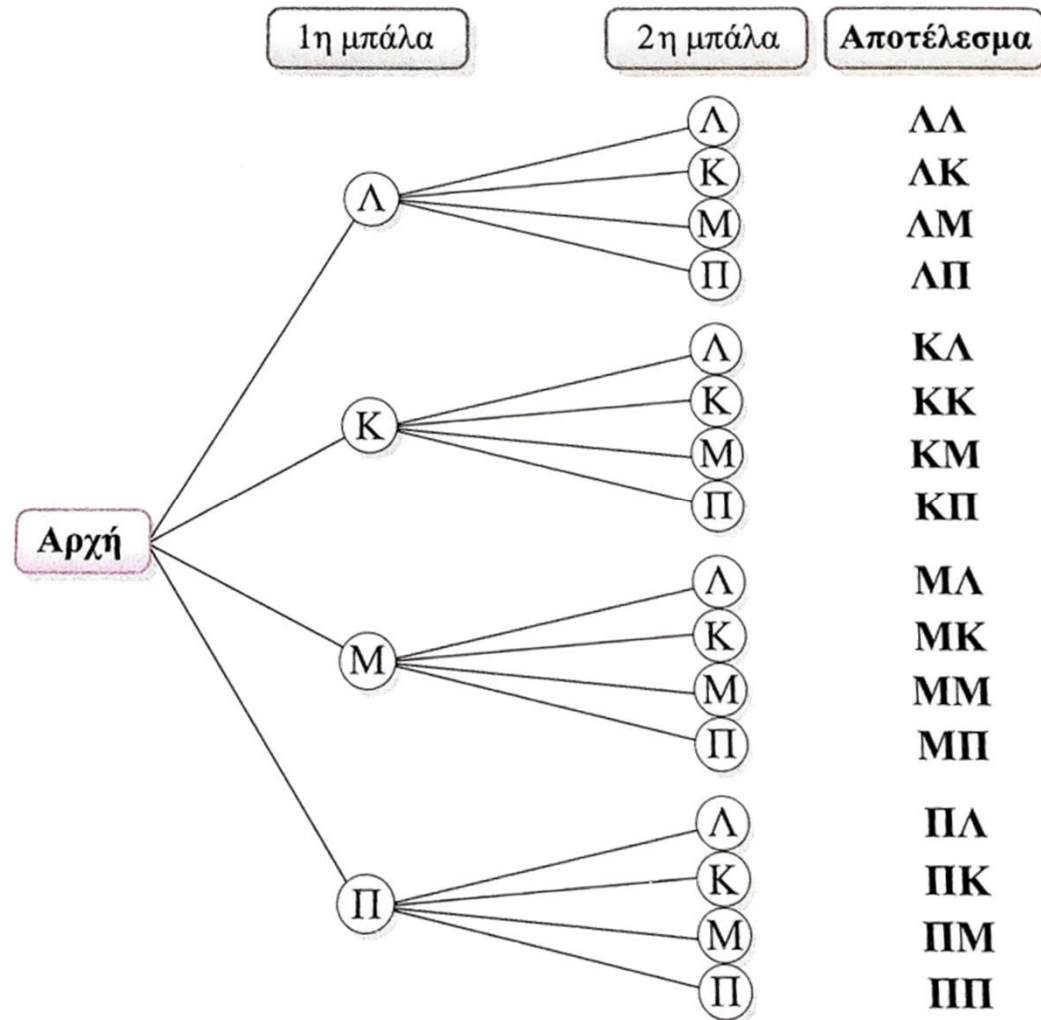
Εφαρμογή 1

Σ' ένα κουτί έχουμε 4 μπάλες, μία λευκή, μία κόκκινη, μία μπλε και μία πράσινη.

Να αναπαραστήσετε με δέντροδιάγραμμα τον δειγματικό χώρο του παρακάτω πειράματος τύχης:

Παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της

Δεντροδιάγραμμα



Ορισμός πιθανότητας

Σ' ένα πείραμα τύχης με n ισοπίθανα αποτελέσματα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A που περιέχει k τέτοια αποτελέσματα είναι:

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } A}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{k}{n}$$

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A συμβολίζεται με $N(A)$. Έτσι ο παραπάνω τύπος γράφεται πιο σύντομα ως εξής:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n}$$

όπου Ω ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης.

Εφαρμογή 2

Ρίχνω ένα ζάρι μια φορά. Βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρω άρτιο αριθμό.

Αρχή απαρίθμησης

«Ποια είναι η πιθανότητα να φέρω γράμματα αν ρίξω ένα αμερόληπτο νόμισμα;»

1. Απαριθμούμε το πλήθος των **δυνατών αποτελεσμάτων (2)**
2. Απαριθμούμε το πλήθος των **ευνοϊκών αποτελεσμάτων (1)**

$$P=1/2$$

Αρχή απαρίθμησης

«Ποια είναι η πιθανότητα κατά τη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού να έρθει 5 ή 6 ;»

1. Απαριθμούμε το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων {1,2,3,4,5,6}
2. Απαριθμούμε το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων {5,6}

$$P=2/6 = 1/3$$

Αρχή απαρίθμησης

Στα πειράματα τύχης για να υπολογιστεί η πιθανότητα ενός ενδεχομένου πρέπει να μπορούμε να απαριθμήσουμε το πλήθος των **δυνατών αποτελεσμάτων** καθώς και το πλήθος των **ευνοϊκών αποτελεσμάτων** (αυτών που συμβαίνουν).

Αρκετές φορές τα *πλήθη* αυτών των αποτελεσμάτων είναι πολύ μεγάλοι αριθμοί και είναι δύσκολο να βρεθούν με καταγραφή ή μ' ένα δεντροδιάγραμμα. Ένας τρόπος που μας βοηθά να μετρήσουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου είναι η **βασική αρχή απαρίθμησης**.

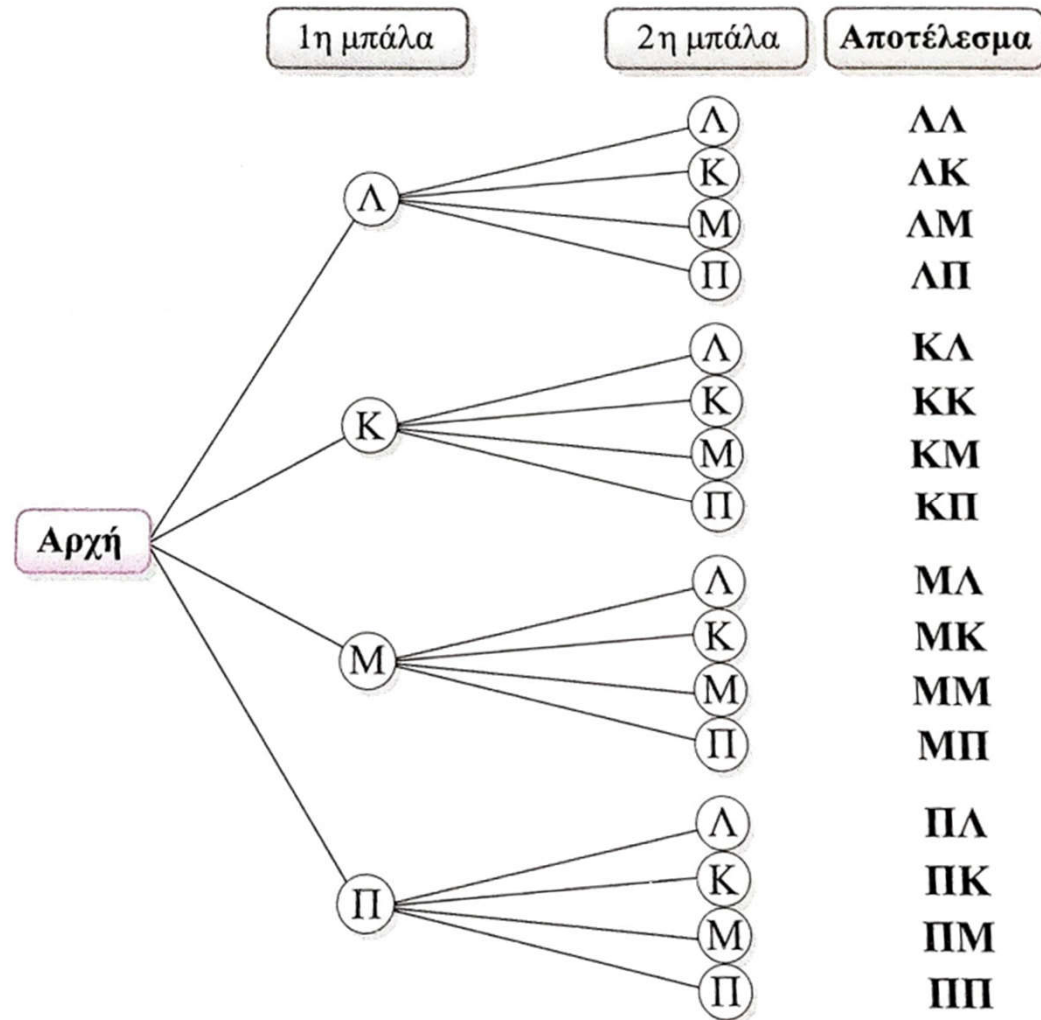
Συνδυαστική

Η Συνδυαστική (ή Συνδυαστική Ανάλυση) έχει ως αντικείμενο την ανάπτυξη μεθόδων απαρίθμησης, δηλαδή τεχνικών υπολογισμού του πλήθους των στοιχείων συνόλων ή υποσυνόλων τους με συγκεκριμένες ιδιότητες, χωρίς να απαιτείται η πλήρης καταγραφή των στοιχείων τους.

Πολλαπλασιαστική αρχή

Αν κατά την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου:

- α) η διαδικασία της απαρίθμησης μπορεί να χωρισθεί σε διαφορετικά βήματα τα οποία πρέπει να εκτελεσθούν διαδοχικά το ένα μετά το άλλο και
 - β) το πλήθος των δυνατών επιλογών σε κάθε βήμα είναι πλήρως καθορισμένο όταν είναι γνωστά τα αποτελέσματα όλων των προηγούμενων βημάτων,
- τότε η απαρίθμηση μπορεί να γίνει με χρήση της **πολλαπλασιαστικής αρχής**



Πολλαπλασιαστική αρχή

Θεωρούμε μια διαδικασία που μπορεί να χωριστεί σε n διαδοχικές φάσεις $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

- η πρώτη φάση φ_1 μπορεί να εκτελεστεί με k_1 τρόπους,
- για καθέναν από τους παραπάνω τρόπους, η δεύτερη φάση φ_2 μπορεί να εκτελεστεί με k_2 τρόπους,
- ...

Η αρχική διαδικασία τότε μπορεί να εκτελεστεί συνολικά με:

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_n \text{ τρόπους}$$

Πολλαπλασιαστική αρχή – Εφαρμογή 3

Πρόκειται να φυτέψετε σε μια σειρά μια ελιά (Ε), μια νερατζιά (Ν), μια πορτοκαλιά (Π) και μια λεμονιά (Λ) ώστε να δημιουργήσετε μια συστοιχία τεσσάρων δέντρων. Πόσες διαφορετικές επιλογές έχετε για τη δημιουργία της δεντροστοιχίας;

(Έχω 4 δέντρα. Προφανώς μπορώ να πάρω το καθένα μία μόνο φορά)

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Πολλαπλασιαστική αρχή – Εφαρμογή 3

- Για την να 1^η θέση της δεντροστοιχίας έχουμε 4 διαφορετικές επιλογές (Ε, Ν, Π και Λ).
- Οποιαδήποτε και αν είναι η επιλογή μας για την 1η θέση, για τη 2η έχουμε 3 διαφορετικές επιλογές (αφού το ένα από τα τέσσερα δένδρα έχει ήδη φυτευτεί στην 1η θέση).
- Επομένως, για τις δύο πρώτες θέσεις έχουμε $4 \cdot 3 = 12$ διαφορετικές επιλογές.
- Οποιαδήποτε (από τις 12) και αν είναι η επιλογή μας για τις δύο πρώτες θέσεις, για την 3η θέση προφανώς έχουμε 2 διαφορετικές επιλογές, άρα για τις τρεις πρώτες θέσεις έχουμε: $12 \cdot 2 = 24$ διαφορετικές επιλογές.
- Τέλος, οποιαδήποτε (από τις 24) και αν είναι η επιλογή μας για τις τρεις πρώτες θέσεις, για την 4η θέση προφανώς έχουμε μόνο 1 επιλογή, επομένως η δεντροστοιχία μπορεί να δημιουργηθεί με $24 \cdot 1 = 24$ διαφορετικούς τρόπους.

Πολλαπλασιαστική αρχή – Εφαρμογή 3

- Για τη δημιουργία μιας διατεταγμένης τετράδας (δενδροστοιχίας) υπάρχει ο περιορισμός ότι ένα δένδρο που ήδη έχει επιλεγεί σε κάποιο βήμα, δε μπορεί να επιλεγεί και πάλι σε επόμενο βήμα

(Διάταξη χωρίς επανάληψη)

Πολλαπλασιαστική αρχή – Εφαρμογή 4

Για να ενεργοποιηθούν οι ηλεκτρονικές συσκευές και κάρτες (κινητά τηλέφωνα, συστήματα συναγερμού , κάρτες τραπεζών, κ.ά.), πρέπει να πληκτρολογηθεί ένας τετραψήφιος κωδικός, δηλαδή, πρέπει να πληκτρολογηθούν, με συγκεκριμένη σειρά, τέσσερα ψηφία.

Πόσοι διαφορετικοί τετραψήφιοι κωδικοί μπορούν να σχηματισθούν από τα δέκα ψηφία, 0, 1, 2,...,9;

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10.000$$

Πολλαπλασιαστική αρχή – Εφαρμογή 4

Σε αυτό το παράδειγμα υπάρχει η δυνατότητα οποιοδήποτε από τα στοιχεία του συνόλου $\{0, 1, \dots, 8, 9\}$ να μπορεί να επιλεγεί περισσότερες από μία φορές.

(Διάταξη με δυνατότητα επανάληψης)

Εφαρμογή 5

Στη βιβλιοθήκη ενός σχολείου ένας Μαθηματικός ανέλαβε να κολλήσει σε κάθε βιβλίο έναν κωδικό, που αποτελείται από τρία διατεταγμένα σύμβολα, ως εξής: το 1^ο και το 2^ο είναι ένα τυχαίο κεφαλαίο γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου και το 3^ο είναι ένας τυχαίος μονοψήφιος αριθμός (από το 0 έως και το 9).

α) Πόσοι τέτοιοι κωδικοί μπορούν να σχηματιστούν συνολικά;

β) Αν διαλέξουμε τυχαία έναν από αυτούς τους κωδικούς, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

i) A: το 1ο γράμμα του κωδικού είναι φωνήεν, το 2ο γράμμα είναι σύμφωνο και ο αριθμός είναι περιττός,

ii) B: τα δύο γράμματα είναι ίδια και ο αριθμός είναι μεγαλύτερος του 5.

Διατάξεις (με δυνατότητα επανάληψης)

- Διάταξη των **n στοιχείων** ενός συνόλου A **ανά k** , ονομάζεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε στοιχεία του A σε μια σειρά k θέσεων, επιτρέποντας επαναλήψεις.
- Το πλήθος των διατάξεων των n ανά k είναι ίσο με **n^k**
- n : ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου
 k : ο αριθμός των «θέσεων»

Πολλαπλασιαστική αρχή – Εφαρμογή 4

Για να ενεργοποιηθούν οι ηλεκτρονικές συσκευές και κάρτες (κινητά τηλέφωνα, συστήματα συναγερμού , κάρτες τραπεζών, κ.ά.), πρέπει να πληκτρολογηθεί ένας τετραψήφιος κωδικός, δηλαδή, πρέπει να πληκτρολογηθούν, με συγκεκριμένη σειρά, τέσσερα ψηφία.

Πόσοι διαφορετικοί τετραψήφιοι κωδικοί μπορούν να σχηματισθούν από τα δέκα ψηφία, 0, 1, 2,...,9;

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10.000$$

Εφαρμογή 6

Να υπολογίσετε πόσους:

α) **τετραψήφιους** φυσικούς αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6 όσες φορές θέλουμε το καθένα,

β) **εξαψήφιους** φυσικούς αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 7, 8, 9 όσες φορές θέλουμε το καθένα

Διατάξεις (χωρίς επανάληψη)

Διάταξη των **n στοιχείων** ενός συνόλου A **ανά k χωρίς επανάληψη**, με $k < n$, ονομάζεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε k στοιχεία του A και να τα βάλουμε σε σειρά.

- Το πλήθος των διατάξεων των n ανά k χωρίς επαναλήψεις, με $k < n$, συμβολίζεται με $(n)_k$ και είναι ίσο με:

$$(n)_k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ πλήθος παραγόντων}}$$

Ή αλλιώς υπολογίζεται από τον τύπο:
$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Εφαρμογή 7

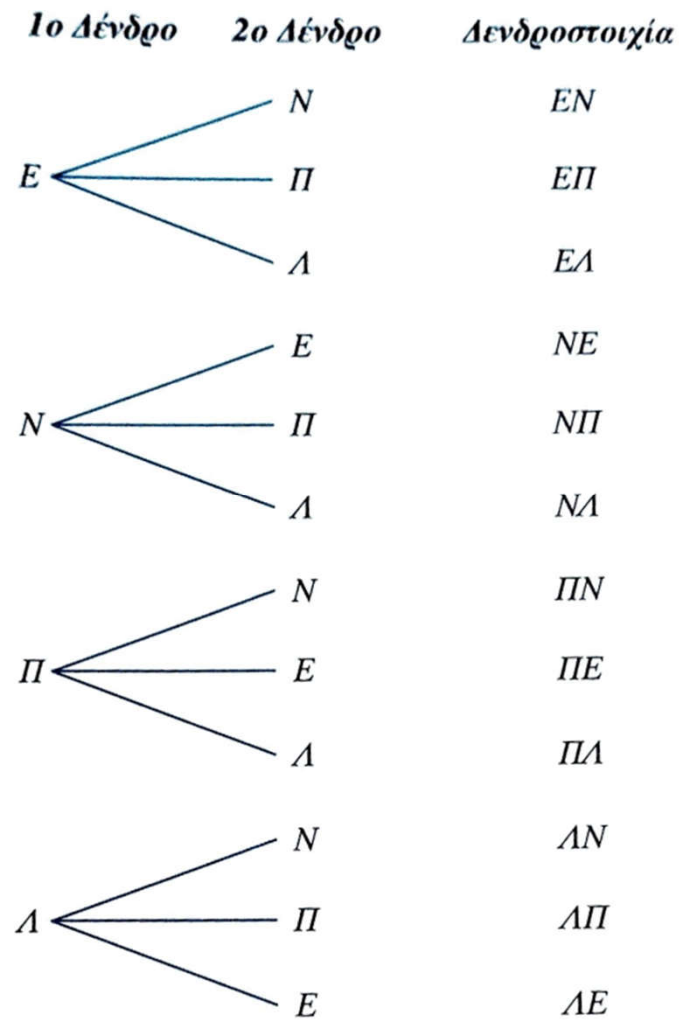
Έχετε μια ελιά (Ε), μια νερατζιά (Ν), μια πορτοκαλιά (Π) και μια λεμονιά (Λ).
Πόσες διαφορετικές επιλογές έχετε για να δημιουργήσετε μια δενδροστοιχία των **δύο δένδρων** που θα επιλέξετε **από ένα σύνολο τεσσάρων δένδρων**;

$$4_{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1*2*3*4}{1*2} = 3 * 4 = 12$$

Εφαρμογή 7

- Κάθε διατεταγμένη 2-άδα που δημιουργείται από διαφορετικά στοιχεία του συνόλου $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$ ονομάζεται διάταξη των 4 ανά 2.
- Η απαρίθμηση μπορεί να γίνει σε 2 διακριτά διαδοχικά βήματα με καθορισμένο το πλήθος των επιλογών μας σε κάθε βήμα, επομένως, εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή, εύκολα προκύπτει ότι ο αριθμός των διαφορετικών διατεταγμένων 2-άδων που μπορούν να δημιουργηθούν από διαφορετικά στοιχεία του συνόλου $\{E, N, \Pi, \Lambda\}$ είναι $4 \cdot 3 = 12$.
- Παρατηρήστε ότι στο 1ο βήμα έχουμε 4 επιλογές ενώ στο 2ο έχουμε $4 - 1 = 3$ επιλογές, αφού το δένδρο (όποιο και να είναι) επελέγη για να φυτευτεί στο 1ο βήμα, δε μπορεί να επιλεγεί και πάλι στο 2ο βήμα

Εφαρμογή 7



Εφαρμογή 8

Σχηματίστε όλους τους δυνατούς τριψήφιους φυσικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας τα ψηφία 2, 3, 4, 5, 7 το πολύ μια φορά το καθένα.

Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους παραπάνω αριθμούς, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- i) A: ο αριθμός είναι άρτιος
- ii) B: ο αριθμός είναι μεγαλύτερος του 400

Εφαρμογή 9

Οι διοργανωτές ενός συνεδρίου θέλουν να δώσουν σε κάθε συμμετέχοντα ένα καρτελάκι μ' έναν (μοναδικό) κωδικό. Αποφασίστηκε οι κωδικοί να έχουν δύο σύμβολα: το 1ο να είναι ένα κεφαλαίο γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου και το 2ο να είναι ένας μονοψήφιος αριθμός (0- 9). Ετοίμασαν καρτελάκια με όλους τους κωδικούς που ήταν δυνατόν να φτιαχτούν με τον παραπάνω τρόπο.

α) Πόσα καρτελάκια έφτιαξαν οι διοργανωτές;

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα καρτελάκι, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) A: το γράμμα του κωδικού είναι σύμφωνο,

ii) B: ο αριθμός του κωδικού είναι άρτιος,

iii) Γ: το γράμμα είναι φωνήεν και ο αριθμός είναι μικρότερος του 3.

Εφαρμογή 10

Σ' ένα κουτί υπάρχουν 6 σφαίρες αριθμημένες από το 1 έως και το 6.

Εκτελούμε το εξής πείραμα τύχης:

Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα και σημειώνουμε τον αριθμό της. Στη συνέχεια, χωρίς να επανατοποθετήσουμε τη σφαίρα κουτί, επιλέγουμε μια δεύτερη σφαίρα και σημειώνουμε τον αριθμό της. Τέλος, χωρίς να επανατοποθετήσουμε τις 2 πρώτες σφαίρες επιλέγουμε μια τρίτη σφαίρα και σημειώνουμε τον αριθμό της. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

Ο πρώτος αριθμός να είναι ο 6 και ο δεύτερος να μην είναι ο 5